ISSN 2447-746X

Ridphe_R

DOI: 10.20888/ridphe_r.v5i0.9931

:

¿DÓNDE VA EL ROMBOIDE? CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICO-ESPACIALES QUE EMERGEN A PARTIR DEL USO DEL TANGRAM EN UNA ESCUELA PRIMARIA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

Tatiana Mendoza von der Borch
Departamento de Investigaciones Educativas-CINVESTAV
México
tatumendoza1@gmail.com

David Block Sevilla
Departamento de Investigaciones Educativas-CINVESTAV
México
dblock@cinvestav.mx

RESUMEN

En este artículo analizamos los conocimientos espacio-geométricos que movilizan alumnos de primaria al hacer configuraciones con el tangram, a partir de la observación de dieciocho clases en un grupo de quinto grado de primaria de una escuela pública de la Ciudad de México. Mostramos que esta actividad genera el despliegue de numerosas hipótesis, su puesta a prueba y a veces reelaboración por parte de los alumnos. En este proceso, se potencian también las interacciones entre pares, que a su vez enriquecen la interacción con la tarea. Concluimos apoyando la postura de que el aprendizaje de las figuras geométricas necesariamente requiere trabajo simultáneo con distintos tipos de figuras manipulables, pues ello permite, por contraste, reparar en las características de cada una de ellas.

Palabras clave: Tangram. Geometría. Escuela primaria.

WHERE DOES THE RHOMBOID GO? GEOMETRICAL AND SPACIAL KNOWLEDGES THAT EMERGE THROUGH THE USE OF THE TANGRAM IN AN ELEMENTARY SCHOOL IN MEXICO CITY

ABSTRACT

In this article we analyze the understanding of geometrical figures that elementary school students put into practice when forming configurations with the tangram parts. We draw data from classroom observation of eighteen lessons in a fifth-grade class of a public elementary school located in Mexico City. We explain how this activity allows students to display numerous hypotheses, test their validity and re-elaborate them. We show how within this process, interaction among peers increases and enriches their involvement in the academic task. We conclude that the text supports the idea that learning geometrical figures necessarily implies hands-on manipulation of a variety of figures, such as those offered by the tangram. These characteristics allow students to contrast figures and therefore become aware of the properties of each one.

Key words: Tangram. Geometry. Elementary school.

PARA ONDE VAI O ROMBOIDE? CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS ESPACIAIS QUE EMERGEM A PARTIR DO USO DO TANGRAM EM UMA ESCOLA PRIMÁRIA DA CIDADE DO MÉXICO

RESUMO

Neste artigo analisamos os conhecimentos geométricos e espaciais mobilizados pelos alunos de ensino primário, ao fazer configurações usando o tangram, partindo da observação de dezoito aulas num grupo de quinta série de uma escola pública da Cidade do México. Apresentamos a forma em que esta atividade desencadeia o desdobramento de numerosas hipóteses, a tentativa de verificação destas e a sua reelaboração por parte dos próprios alunos. Neste processo, potenciam-se também as interações entre pares, que por sua vez enriquecem a interação com a tarefa. Concluímos em apoio da postura de que o aprendizado das figuras geométricas necessariamente requer trabalho simultâneo com distintos tipos de figuras, pois isso permite, por contraste, reparar nas caraterísticas de cada uma delas.

Palavras-chave: Tangram. Geometria. Ensino primário.

OÚ VA LE RHOMBOÏDE? CONNAISSANCES GÉOMÉTRIQUES ET SPATIALES ÉMERGENTES DE L'UTILISATION DU TANGRAM DANS UNE ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE DE LA VILLE DE MEXIQUE

RESUME

Dans cet article, nous analysons les connaissances géométriques et spatiales que des élèves de 10 ou 11 ans mettent en jeu lorsqu'ils font des configurations avec le tangram, à partir de l'observation de dix-huit classes dans un groupe de la cinquième année d'une école publique à Mexico. Nous montrons que cette activité déclenche le déploiement de nombreuses hypothèses, leur mise à l'épreuve et parfois leur remaniement par les étudiants. Dans ce processus, les interactions entre les élèves se multiplient, ce qui enrichit à son tour l'interaction avec la tâche. Nous concluons en soutenant que l'apprentissage des figures géométriques exige nécessairement un travail simultané avec différents types de figures manipulables, car cela permet, par contraste, de noter les caractéristiques de chacune d'elles.

Mots-clés : Tangram. Géométrie. Ecole élémentaire.

INTRODUCCIÓN[1]

Es fácil pensar que ciertas propiedades de las figuras geométricas se pueden aprender rápidamente. Que un triángulo tiene tres lados, es más grande que otro, es igual a otro, tiene un lado más grande que los otros dos, o puede tener un ángulo recto, parecen características tan

[1] Artículo basado en el trabajo de Doctorado en Ciencias con especialidad en Investigación Educativa, de Tatiana Mendoza von der Borch, bajo la asesoría del Dr. David Block Sevilla. El programa cuenta con beca CONACYT.

simples, tan claramente visibles en la figura, que basta con mostrarlas a los alumnos para que se las apropien.

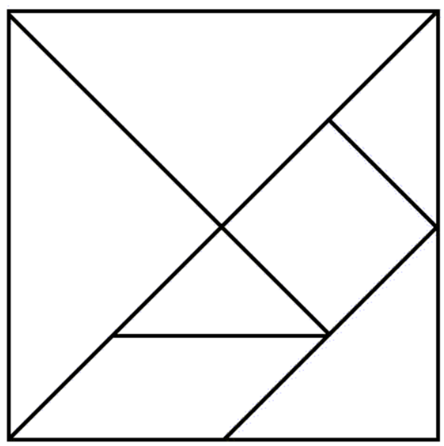
Diversos trabajos han señalado que esto ocurre con frecuencia en la enseñanza de la geometría. Fregona (1995) caracteriza las prácticas ostensivas como aquellas en las que el maestro muestra un objeto a sus alumnos, suponiendo que ellos verán en ese objeto lo mismo que él mira, y entonces no es necesario un trabajo para hacerlos ver. Es decir, que esas prácticas se definen por “la ilusión de la evidencia” (p. 99). Por el contrario, cuando un maestro busca hacer ver, es porque reconoce que hay una diferencia entre las interacciones que él tiene con el objeto y las que tienen los alumnos, que es importante enseñar a “leer” una figura (por ejemplo, a ver una línea recta en cada lado del triángulo).

Vecino Rubio (2003) muestra que la enseñanza por ostensión proviene en buena medida de los libros de texto, en los cuales frecuentemente las figuras están dibujadas y por lo tanto el alumno no las puede manipular; aparecen una por una y entonces difícilmente el alumno puede comparar sus características; y esas características son mostradas con explicaciones, dibujos, flechas que señalan una línea importante, no emergen a partir de un problema que las haga funcionales.

Algunos estudios hechos desde la Teoría de las Situaciones Didácticas -y desde la cognición- han mostrado que “ver” en geometría supone un proceso de aprendizaje que dura varios años, y que implica cambios importantes en la mirada sobre las figuras. Duval y Godin (2005) explican que el cambio fundamental consiste en pasar de mirar las figuras como bidimensionales a verlas como unidimensionales. Las figuras son generalmente percibidas e interpretadas como bidimensionales por los alumnos, quienes se fijan primordialmente en las superficies y sus contornos. No obstante, el pensamiento geométrico implica trabajar fundamentalmente sobre las componentes lineales de las figuras: rectas paralelas, perpendiculares, alturas de triángulos, diagonales de rombos, bases de trapecios. Un claro ejemplo es la definición de triángulo -una superficie- como una figura de tres lados -líneas-, agrupando así en una misma categoría formas que pueden ser muy distintas. Gestionar este cambio de mirada en los alumnos implica una elección cuidadosa de tipos de problemas, figuras geométricas e instrumentos.

Los conocimientos que mencionamos en el primer párrafo son entonces difíciles de construir, requieren de un proceso largo en el que los alumnos tengan la experiencia de resolver problemas que los hagan funcionales. Además, constituyen un soporte importante para poder acceder después a otros conocimientos que suelen valorarse más tanto desde la enseñanza como desde la investigación por más complejos, evaluables, evidenciables. Por ejemplo, las fórmulas para calcular áreas suponen la construcción de la noción de figuras como el triángulo, lo cual requiere el cambio de mirada que describimos en el párrafo anterior. El tangram es un material didáctico que permite diseñar problemas acordes con la posición sobre la enseñanza de las figuras geométricas que hemos planteado. Se trata de un rompecabezas de origen chino que tiene siete piezas: dos triángulos pequeños, uno mediano, dos grandes, un romboide y un cuadrado (Imagen 1). Con ellas, los alumnos pueden hacer distintas configuraciones, y como mostraremos a lo largo del artículo, aprenden poco a poco a "leer" las figuras.

IMAGEN 1



En este texto mostraremos cómo se empiezan a gestar, de manera implícita, inacabada, personal, algunos de los conocimientos que mencionamos en el primer párrafo, a partir de la observación de un grupo de alumnos que hace configuraciones con el tangram. Esos conocimientos surgen a partir de la interacción que los alumnos tienen con el material, y también de las interacciones con los pares a propósito de ese trabajo de configuraciones. Por ello, además de utilizar la Teoría de las Situaciones Didácticas (BROUSSEAU, 2007), que caracteriza los conocimientos a partir de su funcionalidad, recurrimos a herramientas de teorías socioculturales sobre el lenguaje para analizar las interacciones entre pares (ERICKSSON, 1982; MC DERMOTT, 2001; O'CONNOR y MICHAELS, 1996).

Los datos provienen de una investigación de tesis doctoral, centrada en analizar el papel de la tarea académica y las interacciones entre pares en el proceso de estudio de medición de superficies en primaria. Con este propósito, observamos dieciocho clases de quinto grado -en el que los programas oficiales prescriben el estudio de las áreas-, de una escuela primaria pública, urbana, en la Ciudad de México. Elegimos observar clases comunes, es decir, organizadas por la maestra sin nuestra intervención. No obstante, contactamos a la docente a partir de un taller sobre enseñanza de la medición, así que en dos clases que observamos -las que analizaremos en este artículo- ella recuperó actividades vistas en ese taller. Si bien estas actividades fueron planteadas con la intención de comparar superficies de plantillas que pueden rellenarse con algunas piezas del tangram, el problema fuerte para los alumnos resultó ser precisamente el rellenado de las plantillas, es decir, la puesta en juego de conocimientos geométrico-espaciales para lograr una conjugación particular de las piezas. En cada clase había dos observadoras, una que tomaba notas y fotografías para registrar la actividad de un equipo de alumnos en particular, y otra que mediante video obtenía un registro más general de todo el grupo, incluyendo la maestra.

EL TANGRAM Y LA PROBLEMÁTICA DE LOS MATERIALES DIDÁCTICOS EN MÉXICO

El tangram es un material ampliamente conocido por los maestros, se encuentra frecuentemente en las escuelas, y numerosos libros para alumnos o docentes contienen secuencias didácticas en las que el tangram se utiliza para hacer emerger conocimientos de fracciones, medición de áreas, y principalmente de geometría (FUENLABRADA y al, 1991; ROCKWELL y REBOLLEDO, 2016; LOZANO SUÁREZ, 2018). En la descripción de estas secuencias se intenta proponer actividades en las que se gradúa paulatinamente la dificultad, y se dan orientaciones al docente respecto a los conocimientos que los alumnos ponen en juego y a cómo gestionar las actividades en el aula.

No obstante, se usa poco en las clases. Esto puede explicarse a partir de la problemática más amplia del uso de materiales didácticos. La idea de que el material didáctico es fundamental en los procesos de aprendizaje de los alumnos es ampliamente compartida en el magisterio mexicano, sobre todo en preescolar y primaria. Los docentes suelen coincidir en que los alumnos aprovechan mejor el tiempo de estudio cuando abordan actividades planteadas con material

ISSN 2447-746X
Ridphe_R
DOI: 10.20888/ridphe_r.v5i0.9931
:

didáctico. Pero también identifican una serie de restricciones institucionales que dificultan el uso de materiales: la falta de consideración de las necesidades de los maestros en los procesos de adquisición de materiales para las escuelas, y de un proceso de formación que les permita conocer el potencial didáctico de los materiales que se adquieren; la tendencia a responsabilizar a los maestros por la conservación de los materiales en buen estado; la distribución desigual de los recursos públicos entre las escuelas, de manera que la adquisición de materiales depende de la participación de la escuela en diversos programas oficiales; el desconocimiento de algunos maestros respecto al uso de algunos materiales; la subordinación de la primaria a la secundaria, que entre otras cosas prioriza la adquisición en primaria de materiales cuyo uso se exigirá a los alumnos al llegar a la secundaria; la falta de comunicación entre las autoridades educativas que adquieren y envían los materiales a las escuelas, con los encargados en éstas últimas de cuidar esos materiales; y finalmente, el tiempo y costo que implica a los docentes elaborar los materiales que ellos consideran pertinentes para trabajar con sus alumnos (TRINIDAD JIMÉNEZ y SARAO, 2019).

Es decir, si bien estas restricciones dificultan considerablemente el uso de materiales didácticos en las aulas, estos siguen siendo altamente valorados por los docentes, señal de una enseñanza ideal que se supone opuesta a la "tradicional" (TRINIDAD JIMÉNEZ y SARAO, 2019). El material didáctico es también un recurso que permite a los docentes sostener el interés de los alumnos, regular el control de la clase y prevenir el aburrimiento o las disrupciones, además de realzar el valor del juego presente en ciertas normas curriculares (ROCKWELL y al., 2017).

Otro asunto que incide en el uso de los materiales didácticos por parte de los maestros, además de las condiciones institucionales que hemos descrito, es la falta de claridad -en la comercialización de los materiales, en el diseño curricular, en la formación docente- sobre el papel que estos materiales pueden jugar en el aprendizaje de los alumnos. En el año 1993 se llevó a cabo una reforma educativa oficial en México que significó un parteaguas en la manera de concebir el aprendizaje en diversas asignaturas, en particular la de matemáticas. En las propuestas anteriores, sustentadas en distintas perspectivas, los conocimientos se presentaban a los alumnos para que después los aplicaran. En cambio, en la propuesta de 1993 se intentó "desarrollar secuencias de situaciones didácticas que *funcionalizaran* los conocimientos matemáticos específicos, es decir, que los pusieran en juego con el sentido de herramientas para resolver determinadas situaciones problemáticas" (BLOCK, 2018, 294). Este enfoque se basó en la Teoría de las Situaciones Didácticas (BROUSSEAU, 2007), y la idea principal de caracterizar los conocimientos a partir de su funcionalidad se ha conservado en las sucesivas reformas que han tenido lugar a partir de entonces.

Este cambio en la manera de entender el aprendizaje tiene consecuencias sobre el papel que se hace jugar al material didáctico. Hasta mediados del siglo pasado se percibe en las propuestas curriculares una valoración del material en tanto que permite “ver, tocar, manipular”, idea que probablemente proviene de “las corrientes pedagógicas sensual-empiristas del siglo XIX (Juan A. Comenio)” según las cuales “nada hay en la mente que no haya pasado por los sentidos” (Konstantinov y al., 1994, 37 en BLOCK y al., 2007, 740). Más adelante, en las décadas de los setenta y ochenta, se pretendía que el material fuera portador de una representación “concreta” de los conocimientos, punto de partida para que los alumnos accedieran a una representación gráfica y posteriormente a una simbólica (BLOCK y al., 2007). Finalmente, en la propuesta de 1993 y las subsecuentes, el material didáctico se utiliza con la intención de construir una problemática cuya resolución hace emerger los conocimientos que se pretende que los alumnos aprendan (BLOCK y al., 2007).

En la práctica, las tres ideas conviven. Hay una idea muy difundida en el magisterio y en otras esferas del sistema educativo, que enfatiza la importancia de que los alumnos puedan “tocar, palpar, ver, observar” (BLOCK y al., 2007, 272). Esta idea se refuerza por la enorme oferta comercial de materiales cuyo valor se centra en la diversión y el entretenimiento de los alumnos, materiales que han logrado entrar a las escuelas prestando poca atención a sus posibilidades para promover el aprendizaje de los alumnos (ROCKWELL y al., 2017). Por otro lado, esos mismos maestros utilizan propuestas didácticas en las cuales se intenta que el conocimiento emerja como un medio de decisión frente a una problemática, planteada con material.

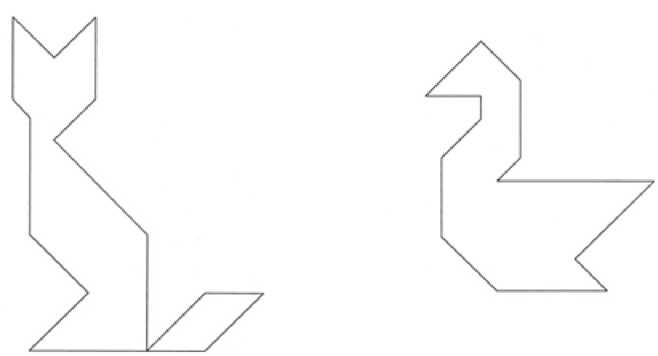
Existen entonces tres procesos que afectan las posibilidades de utilizar el tangram en las aulas para el estudio de las figuras geométricas: uno vinculado a la enseñanza de la geometría, que describimos en el apartado anterior, otro tiene que ver con las condiciones de adquisición y uso de materiales didácticos, y otro relacionado con el papel que se hace jugar al material didáctico en el aprendizaje de los alumnos. En este contexto, el tangram suele estar presente en las escuelas, pero se usa poco en las clases. El caso de la maestra que observamos lo muestra: ella estrenó los tangram que hacía dos años habían sido adquiridos para toda la escuela, y estaban guardados en el salón de materiales.

En su proyecto de enseñanza, la maestra decidió abrir un espacio de dos clases para usar el tangram con una función muy específica: plantear a los alumnos un problema que puedan abordar por sí mismos, sin explicarles antes los conocimientos que resuelven. A continuación analizamos estas clases, centrándonos en las producciones de los estudiantes al hacer configuraciones de piezas.

La complejidad espacio- geométrica en el aula

En la clase 3, la maestra organiza a los niños en equipos de cuatro, cada uno formado por dos parejas. A cada alumno le entrega una plantilla, es decir, una hoja blanca que tiene trazado un contorno que puede rellenarse con las siete piezas de un tangram, de manera que cada pareja tenga las dos siguientes (Imagen 2):

IMAGEN 2.



Después les muestra un tangram y dice, “les voy a dar a cada uno siete piezas… con tus siete piezas vas a tratar de formar la figura que te tocó”. Entrega un tangram a cada pareja de alumnos. Los niños hacen sus configuraciones, es decir, rellenan las plantillas con las piezas del tangram (Imagen 3).

IMAGEN 3

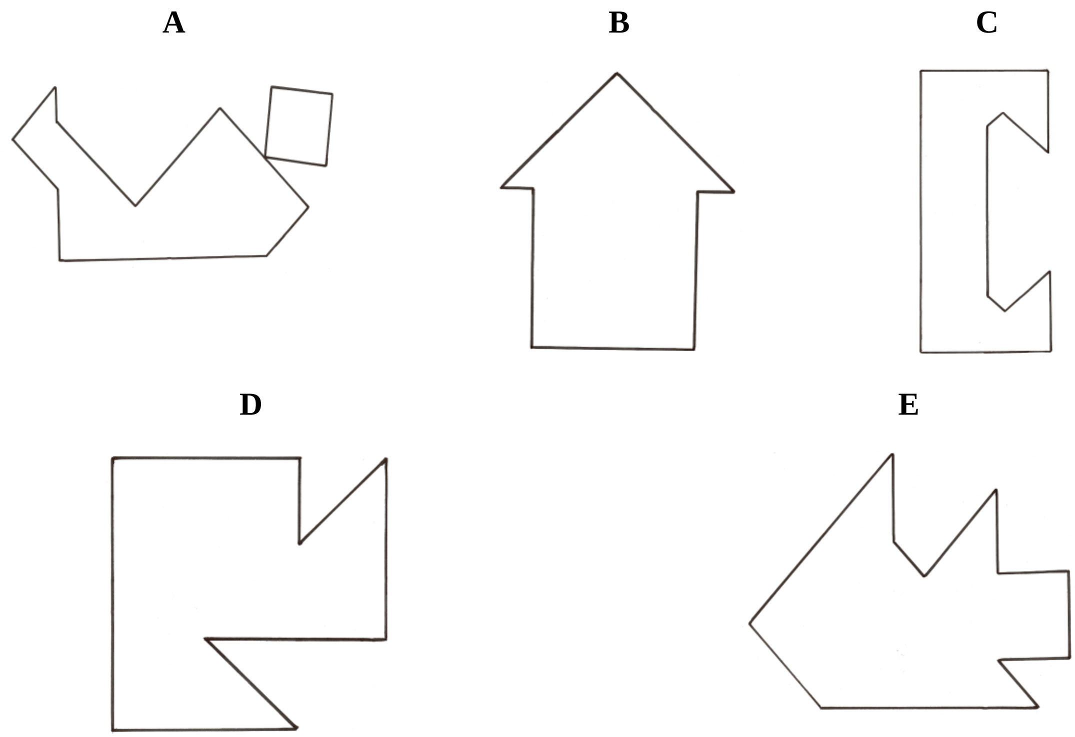
Cuando algunos terminan, la maestra da una nueva consigna:

> Maestra: [a todo el grupo] Voy a darles una hoja blanca, y ya cuando lo hay…, bueno cuando ya lo tengan (…) van a cambiar con su compañero el dibujo, y vas a tratar en la hoja blanca de formar el dibujo que tenía tu compañero. [Se dirige ahora a una pareja específica, Jimena y Sebastián, pero habla en voz alta para que oigan todos] Porque la hoja que, éste dibujo es tuyo [señala la hoja de Jimena] y ése es tuyo [señala la hoja de Sebastián], pero ahora en la hoja blanca vas [se dirige a Sebastián] a tratar de reproducir el dibujo de ella con las piezas del tangram y lo marcas con un lápiz con mucho cuidado ¿sí me expliqué?

Cuando terminan de hacer la hoja que va a quedar en el cuaderno, varios intentan guardar las piezas en su molde cuadrado. Esto implica una nueva tarea, formar un cuadrado con las piezas. Este problema es más difícil que los dos anteriores, porque ese contorno no da pistas sobre dónde puede ir alguna de las piezas o de qué forma puede ir orientada, como en el gato y el pato. Al terminar entregan sus tangram a la maestra.

En la cuarta clase, la docente tiene varios juegos de cinco plantillas que pueden rellenarse con piezas del tangram, pero a diferencia de la clase anterior, no caben todas las piezas en ninguna de las plantillas (Imagen 4):

IMAGEN 4



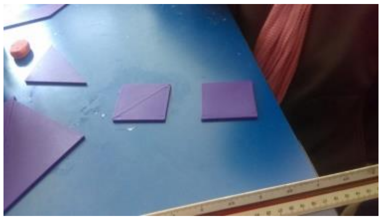
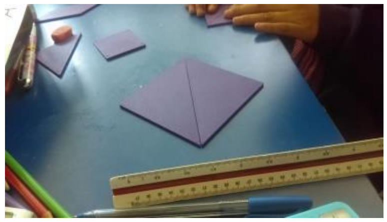
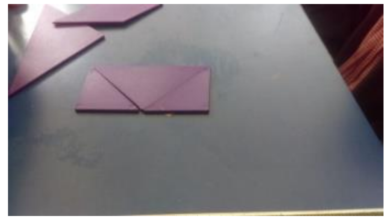
Los alumnos están organizados por parejas, cada una en un mesabanco. La maestra entrega a cada pareja dos de las cinco plantillas, para que cada alumno rellene una, sabiendo que no caben todas las piezas.

Durante las dos clases emergieron varios conocimientos geométricos que los alumnos pueden ir construyendo sobre la marcha al hacer las configuraciones, y al mismo tiempo es necesario que logren acceder a ellos para rellenar correcta y frecuentemente las plantillas. Vamos a explicar cada uno de estos conocimientos, ya sea a partir de un ejemplo en el que se pone en juego o que, al no hacerlo, los alumnos no forman la configuración. Los explicaremos uno por uno, pero como se verá en las descripciones, muchas veces se manifestaron conjugados.

Las relaciones entre las piezas

En la clase 4 una observadora se sienta junto a Miranda y Erick. Ellos son muy juguetones al resolver las tareas. Lo hacen mientras bromean, se quitan las piezas, agregan nuevas tareas, juegan carreras para ver quién arma una figura más rápido, alargan el tiempo de una tarea, y platican de distintos temas. Incluso en algún momento Miranda dice “yo sólo estoy cotorreando”. De pronto, en medio de una plática sobre huracanes que deriva en el juego “El huracán” del parque de diversiones “Six Flags” y en los juegos de ese parque, Miranda pregunta a la observadora “Miss, ¿quiere que forme un cuadrado?”. Cuando le contesta que sí, la alumna hace un cuadrado con los dos triángulos chicos, luego otro con los dos triángulos grandes, y también un “sobre”, es decir, un rectángulo con los dos triángulos chicos y el triángulo mediano (Imágenes 5, 6 y 7).

IMAGEN 5 **IMAGEN 6** **IMAGEN 7**

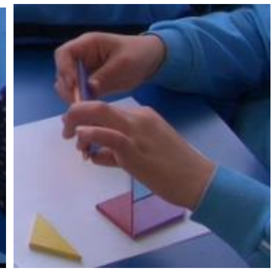




Después sigue jugando con las piezas, arma las figuras que quiere, explora qué resulta, incluso durante la puesta en común. Estas configuraciones más sencillas resultan fundamentales para elegir piezas que se pueden intercambiar por otras al hacer las configuraciones de las plantillas, y también para resolver otras tareas más complejas. Por ejemplo, entender que el cuadrado, romboide y triángulo mediano son equivalentes en superficie pues cada uno se forma con dos triángulos pequeños, ayuda a comparar las superficies de las figuras de las plantillas.

Miranda encuentra así una tarea más fácil que la planteada por la maestra, una exploración fundamental de las relaciones entre las piezas. Y lo hace precisamente porque la devolución con ella se ha logrado a medias, es decir, porque al jugar y reír y hablar de cualquier cosa no se ciñe estrictamente a la tarea que se le ha pedido resolver. Esto tiene también una desventaja, pues Miranda no se interesa por lo que se discute en la puesta en común: se queda solamente con lo que ella logra producir con Erick, y eso resulta insuficiente para resolver después otras tareas.

Otro asunto que no es evidente para algunos alumnos, y que descubren sobre la marcha, es que hay piezas que son iguales. Nahomi, al intentar armar el pato sobre la hoja blanca en la clase 3, pone la plantilla debajo de esa hoja, para poder seguir regulando a partir del contorno como en la tarea anterior. Acomoda un triángulo grande en la esquina y se da cuenta de que *“*No pues está más grande*”*, es decir que la pieza rebasa el contorno (Imagen 8). Toma el otro triángulo grande, lo superpone al primero y se queja: “pero es que los dos están del mismo tamaño… Nada, es que los dos están del mismo tamaño” (Imágenes 9 y 10).

IMAGEN 8 **IMAGEN 9** **IMAGEN 10**

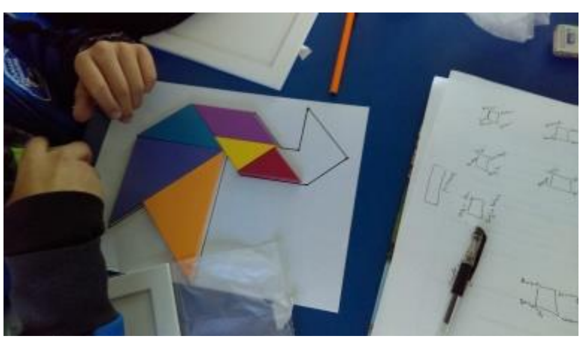


Nahomi consideró que, si el triángulo naranja no cabía, podría intentar con el triángulo morado, pero al superponerlos encuentra que son iguales, así que tampoco cabe el segundo. Es decir, las dificultades de formar una configuración hacen emerger una característica de las piezas que no es obvia para los alumnos: hay dos parejas de triángulos iguales.

La forma de las piezas

Frecuentemente, al hacer las configuraciones, los alumnos acomodan una o varias piezas sin salirse del contorno y luego notan que en el espacio que sobra en la plantilla no cabe ninguna de las piezas que quedan. La imagen 11 muestra que a Edgar sólo le falta colocar el cuadrado, pero éste no cabe en la parte que falta por cubrir. Ian trata de poner en ese lugar el triángulo mediano de su propio tangram (Imagen 12).

IMAGEN 11 **IMAGEN 12**



Si él prueba esa pieza en un contorno que es un pentágono (Imagen 13) es porque no percibe el triángulo a partir de la definición típica del número de lados, sino que se orienta por la forma global tanto del triángulo como de la parte de la plantilla que falta rellenar. En efecto, ese

ISSN 2447-746X
DOI: 10.20888/ridphe_r.v5i0.9931
:

contorno se parece mucho al triángulo mediano, podría transformarse exactamente a él al cortar el trozo en la parte inferior y colocarlo en la esquina inferior derecha (Imagen 14).

IMAGEN 13

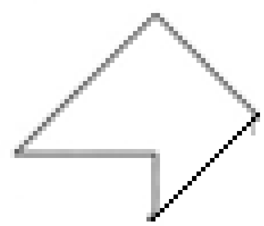
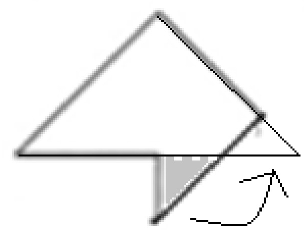


IMAGEN 14



Perrin-Glorian y Godin ayudan a entender esta manera de percibir las figuras geométricas. En las primeras experiencias los alumnos las reconocen apoyándose en la percepción visual y táctil, y entonces para ellos un cuadrado no es un rectángulo, pues este último es "alargado". Además, dos rectángulos, uno mucho más alargado que otro, no necesariamente son puestos en la misma categoría por los niños: "*tener la misma forma* tiene a veces un significado muy amplio" (2018, p. 19). Más adelante caracterizan las figuras a partir de sus propiedades, así que un rectángulo se distingue por tener cuatro ángulos rectos, y un cuadrado entra en esa categoría. Ian pone en juego esa primera percepción visual. Lo que mira en el triángulo no es la propiedad de tener tres lados, sino el espacio delimitado por esos lados que es muy similar al espacio en blanco en la plantilla, por eso para él un triángulo puede parecerse más a un pentágono que a otro triángulo. El triángulo no es una figura naturalmente percibida por los niños en ciertos objetos, sino una noción abstracta que se construye (PERRIN-GLORIAN y GODIN, 2018). De hecho, el nombre "triángulo" reúne en una misma categoría una infinidad de objetos de formas y tamaños muy distintos, que sólo comparten la propiedad de tener tres lados. Apropiarse de esta noción implica modificar drásticamente la manera de percibir las figuras geométricas.

A todos los alumnos les ocurre que colocan algunas piezas y encuentran que no cabe ninguna en el espacio que sobra. Y no es fácil "ver" en qué otros lugares podrían caber las piezas que ya tienen puestas. Esto con frecuencia hace que desarmen la configuración y vuelvan a empezar desde el principio.

Dado que la tarea exige contrastar la forma de las piezas con la del contorno, los alumnos dicen que el gato es más fácil que el pato, pues en el pato "no sabíamos acomodarlo bien, nos confundíamos con muchas piezas que parecían encajar en las partes". En cambio, en el gato "es

ISSN 2447-746X

DOI: 10.20888/ridphe_r.v5i0.9931

Ridphe_R

más fácil descubrir donde se ponen las piezas, (en las orejas) van triángulos chiquitos, (el romboide va) en la cola y esas cosas". Es decir, hay plantillas en las que se puede inferir qué pieza va en cierto lugar porque hay una analogía entre la forma y tamaño de dicha pieza y del objeto concreto que representa la región que ocupa en la plantilla: es más fácil elegir el romboide porque es la cola del gato, que elegirlo, por ejemplo, porque tiene un ángulo obtuso.

El tamaño de las piezas

Después de un tiempo de intentar las configuraciones, varios alumnos encuentran que conviene empezar por colocar los dos triángulos grandes, porque si se dejan al final luego no caben. O al revés, que los triángulos chicos son los más fáciles de acomodar y por ello hay que intentar poner primero el resto de las piezas. Mostraremos un ejemplo del primer caso.

Axel[2] y Jorge[3] intentan armar la figura "C" de la clase 4 (Imagen 15). Empiezan por poner cualquier pieza en cualquier lugar. Axel coloca el cuadrado en una esquina, y a punto de tomar otra pieza se detiene para mirar que Jorge acomoda el triángulo mediano en otra esquina. Luego coloca un triángulo chico, nota que esa configuración va mal y quita el cuadrado. Mientras, Jorge trata de poner un triángulo grande y no puede, aunque lo gira y lo refleja para orientarlo de distintas maneras, porque ya sólo queda sin cubrir una franja que es muy delgada (Imagen 16). Deja esa pieza, toma el otro triángulo grande y encuentra lo mismo –es decir, como Nahomi en un apartado anterior, para él no es claro que esos dos triángulos son iguales-.

IMAGEN 15

IMAGEN 16

[2] De chamarra verde en la imagen 15.

[3] De suéter rojo en la imagen 15.

ISSN 2447-746X
DOI: 10.20888/ridphe_r.v5i0.9931
:
Ridphe_R

Éste es un primer momento en el tránsito de empezar por poner cualquier pieza a empezar por poner los dos triángulos grandes: Jorge se da cuenta que, en una zona grande de la plantilla, los triángulos grandes no caben. Pero su reacción no es concluir que entonces esos triángulos deben ocupar al menos parte del complemento de esa región, sino desentenderse de esas piezas complicadas: saca los dos triángulos grandes de la plantilla y trata nuevamente de colocar las otras piezas en la esquina. En esa búsqueda, dos veces intenta acomodar un triángulo grande, pero lo hace fugazmente, pues en dos segundos toma esa pieza, la pone en un lugar y la retira porque no cabe. Es decir, la tiene presente y al mismo tiempo la deja fuera. Axel observa lo que hace Jorge mientras busca rellenar su esquina de distintas formas con las piezas que no son triángulos grandes. En un momento, ambos dejan de lado los dos triángulos grandes y ponen las otras cinco piezas dispersas en toda la plantilla, como para cubrir todo el espacio con ellas (Imagen 17).

IMAGEN 17

IMAGEN 18

Hasta que Axel toma un triángulo grande:

> 1. Axel: ¿Es que ésta qué cabe aquí? Es que ésta no cabe aquí [es decir, el triángulo grande no cabe en la franja larga y delgada de la plantilla]
>
> 2. Jorge: ¡Noooo! Es que ésa noooo
>
> 3. Axel: [gira el triángulo grande y lo acomoda en una esquina, donde cabe bien (Imagen 18)] Así, así sí cabe
>
> 4. Jorge: ¿Cómo? a ver [deja lo que está haciendo para fijarse en lo que hace Axel]
>
> 5. Axel: ¡Así! Y luego ésta aquí así [toma un triángulo pequeño y lo coloca en el espacio que sobra en la esquina]

6. Jorge: ¡Ahí tá[4]! ¡Entonces una grande va aquí! [Toma el otro triángulo grande y lo acomoda como lo hizo Axel en la esquina superior de la plantilla (Imagen 19)]

7. Axel: [Mientras Jorge toma el triángulo grande, lo gira y acomoda] No [está a punto de quitarle el triángulo a Jorge, pero no lo hace]. ¡Sí! Sí sí sí sí sí. Siiiiiiiii, sí sí sí sí sí [sonríe]

8. Jorge: Y éste [toma el otro triángulo chico]…

9. Axel: [interrumpe la frase anterior de Jorge y señala el espacio donde cabe ese triángulo chico] Y esta chiquita va aquí

10. Jorge: [continúa su intervención] Iría, así... en forma... de que le diera ASÍ [pone el triángulo chico también como lo hizo Axel]

IMAGEN 19

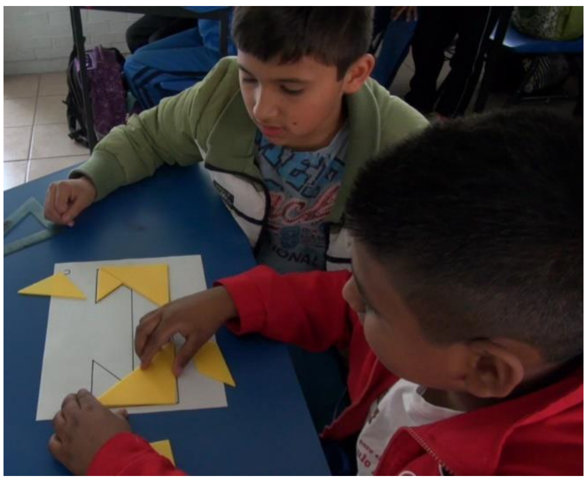


IMAGEN 20

Finalmente, Axel coloca el triángulo mediano, Jorge toma el cuadrado -que no cabe- y ambos saben que la última pieza por poner es el romboide. Así terminan de rellenar la plantilla, y la pieza que sobra es el cuadrado (Imagen 20).

En este ejemplo los triángulos grandes cobran cada vez más importancia y son definitivos para rellenar la plantilla. Al inicio, Axel y Jorge no reparan en estas piezas y comienzan con las demás un poco al azar. Jorge encuentra una falla en estos intentos: el espacio que queda sin cubrir es una franja larga y delgada donde no caben los triángulos grandes. Su reacción es dejarlos fuera de toda la plantilla, probablemente porque el lugar en el que podría explorar si caben ya está ocupado por otras piezas. Axel, en cambio, pone en palabras el hallazgo de Jorge que había estado implícito (línea 1, "ésta no cabe aquí") y en lugar de sacar esas piezas, trata de acomodarlas fuera

[4] Ahí está.

de esa franja (línea 3), aunque ello le implique quitar algunas de las piezas que ya estaban puestas. Es decir, prioriza los triángulos grandes. Cuando logra acomodar uno (línea 3), agrega otra pieza al lado (línea 5) y con ello queda rellena toda la esquina de la plantilla, lo que confirma que el triángulo grande está bien puesto. A esta contribución, Jorge agrega otra: identifica una región de la plantilla que es reflejo de la que rellenó Axel, así que replica lo que hizo él, también en reflejo (líneas 6, 8 y 10). La sorpresa de Axel en la línea 7 muestra que Jorge ha visto algo que es nuevo para él. Después la plantilla queda cubierta rápidamente con dos piezas más.

Los primeros intentos fallidos les toman casi dos minutos, pero a partir de que logran acomodar un triángulo grande, ambos colocan rápidamente el resto de las piezas, una por una, con pocos titubeos y sin modificar la configuración ni una sola vez, en 30 segundos. Los alumnos no reparan en el tamaño de las piezas sólo por verlas: al inicio no se fijan en ello, después surge implícitamente como algo que dificulta la resolución, y finalmente se vuelve una característica un poco más explícita, prioritaria, que hay que poner en juego para terminar la tarea. En pocas palabras, se torna funcional en la formación de configuraciones.

No es casual que los triángulos grandes se vuelvan piezas clave justo en esta plantilla. En ella, esas piezas sólo caben en un lugar muy específico, que además no está claramente sugerido -como lo está el romboide en la cola del gato-. Es decir, se pueden poner en un único lugar que está oculto para los alumnos.

Vale la pena destacar también la interacción “sin costuras”[5] entre Axel y Jorge, que los lleva a resolver. Al inicio ambos ponen piezas en distintas regiones de la plantilla, con cierta autonomía del otro, pero observando lo que hace el otro. Luego Jorge encuentra un asunto clave-una región de la plantilla donde los triángulos grandes no caben-, hallazgo que podría haber pasado de largo, pero Axel, que lo ha observado, lo recupera, lo explicita, lo vuelve prioritario y lo expande: si los triángulos no caben en esa franja, busca otro lugar donde pueden caber y lo consigue (líneas 1 y 3). Al hacerlo, se preocupa porque Jorge entienda lo que hace (líneas 3 y 5, “así sí cabe”), y éste se interesa en ello (línea 4). Jorge también recupera y enriquece el aporte de Axel al reproducir en espejo lo que hizo su compañero (línea 6). Al hacer esto, en lugar de simplemente colocar las piezas sin decir nada, reconoce primero que Axel encontró algo importante (“¡ahí tá!”) y utiliza el

[5] Tomo esta palabra de Erickson (https://www.youtube.com/watch?v=vhthoOHXMSI) quien la usa para referirse a un grupo de alumnos de preescolar y su maestra que pasan del español al inglés y viceversa de manera fluida, sin rupturas, y por lo tanto sin necesidad de enmendar esas rupturas. Como una prenda de ropa que no tiene remiendos y en la que no se sabe cuándo se pasa de una pieza a otra.

marcador “entonces”, con lo cual deja claro que él sabe dónde va el segundo triángulo porque vio dónde va el primero. Es decir, que su aporte proviene de la contribución anterior de su compañero. O’Connor y Michaels (1996) muestran que esto no ocurre con frecuencia entre los alumnos, pues ellos suelen presentar sus aportes sin asociarlos a los de sus pares. Axel al principio niega lo que hace Jorge (línea 7), está a punto de interrumpirlo -lo cual ocurre frecuentemente en las clases que observamos- pero se detiene y , cuando encuentra que su compañero tiene razón, lo reafirma (línea 7). Nuevamente, contiene una interrupción (línea 9) para dejar que Jorge termine lo que está haciendo (líneas 8 y 10). Finalmente, ambos acaban rápido de resolver. En resumen, cada uno agrega algo nuevo al aporte anterior del otro, como ladrillos que se van superponiendo, y cada vez reciben del problema la información de que van por buen camino, hasta que la tarea queda resuelta. A la interacción de cada uno con el problema se agrega la información que aporta el otro. Como señala Cambriglia (2018), las interacciones sociales muchas veces permiten sostener la incertidumbre -en este caso, de no saber qué hacer con los triángulos grandes-, cuando los participantes ayudan sucesivamente a completar producciones incompletas. Esta manera de resolver juntos nos importa especialmente porque los dos son alumnos con rezago, que en otras clases no pueden abordar los problemas.

La simetría

Engie trata de formar el gato en la clase 3. Lo toma como una tarea estrictamente personal, pues casi no habla y cuando alguien de su equipo o del contiguo avisa que ha terminado, ella voltea de reojo rápidamente y vuelve a su propio rompecabezas. Incluso los estuches de materiales, puestos en medio de la mesa, dificultan que ella mire lo que hace Ian, su compañero de equipo que también tiene esa plantilla (Imagen 21).

IMAGEN 21

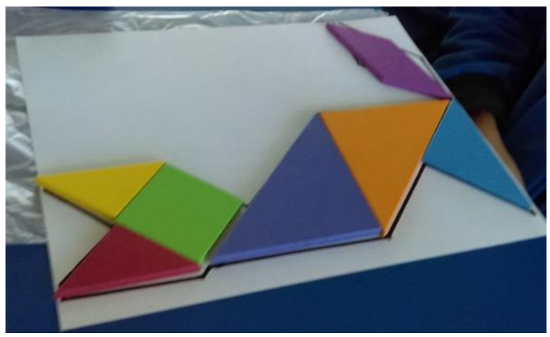
ISSN 2447-746X

DOI: 10.20888/ridphe_r.v5i0.9931
:

Ridphe_R

El gato no es fácil de armar para ella. Al menos una vez quita todas las piezas que tiene puestas y vuelve a empezar. Hasta que casi logra rellenar su plantilla, excepto por el romboide. Ella sabe dónde va esa pieza, pero no consigue hacer que embone con el contorno trazado (Imagen 22). La gira una y otra vez, pero no se le ocurre reflejarla. La observadora espera un poco y luego decide intervenir pidiendo a Valeria "a ver ayúdale (a Engie) con éste [el romboide]. Nomás le falta éste". Valeria inmediatamente refleja el romboide y la plantilla queda terminada. Engie sigue en silencio, espera la siguiente instrucción.

IMAGEN 22



Nos interesa contrastar la rapidez con que Valeria acomoda correctamente el romboide con el tiempo que Engie lo intenta sin lograrlo. Saber que una pieza va en cierto lugar no es suficiente para colocarla en posición correcta. A veces hace falta girarla para hacer que un ángulo o el tamaño de un lado coincida con el contorno marcado, y otras veces, como en este ejemplo, es indispensable reflejarla. En muchas resoluciones que observamos, los alumnos tienden naturalmente a girar las piezas, pero pocas veces las reflejan. Muchos no lo hacen. Muchos no lo hacen. El romboide es la pieza cuya posición es más difícil de encontrar, pues es la única que no es simétrica.

El tamaño de los ángulos o lados de una pieza

Al terminar la tarea y el registro en el cuaderno en la clase 3, los alumnos deben guardar su tangram. En algunos casos, la caja contiene un espacio cuadrado donde van dos tangram completos, cada uno en dos capas cuadradas (Imagen 23). Así, guardarlos implica que dos compañeros formen cuatro cuadrados iguales con sus catorce piezas.

IMAGEN 23

IMAGEN 24

Arturo comienza a guardar las suyas. Hace primero una capa con los dos triángulos grandes. Para hacer la segunda capa, coloca primero el triángulo mediano y el pequeño. A diferencia de la imagen 23, donde el triángulo mediano está orientado de tal forma que su lado más grande coincida con el lado del cuadrado del molde, Arturo acomoda la pieza de manera que sea el ángulo recto el que coincida con la esquina del molde (Imagen 24). Y hace lo mismo con el triángulo pequeño en la esquina opuesta. Es decir, elige los ángulos rectos como primer criterio para reproducir la forma del cuadrado. Esto puede deberse a que debajo de esos dos triángulos, en la primera capa, están los triángulos grandes, y Arturo conserva en la segunda capa la manera en que están orientados. O bien, a que una característica fundamental del cuadrado es que todos sus ángulos son rectos, y por ello Arturo los prioriza. Al tratar de poner las otras piezas, Arturo quita las dos que ya había puesto.

En ese momento llega Juan David a guardar su tangram en la misma caja que Arturo. Después de intentar sin éxito una forma de colocar sus piezas, y sin haber visto antes a su compañero, hace lo mismo que él: pone un triángulo mediano de manera que el ángulo recto quede en la esquina del molde. Coloca otra pieza y luego quiere quitar las dos, pero Arturo deja el triángulo mediano como está. Juan David pone y quita distintas piezas, pero deja siempre ese triángulo mediano. Luego Arturo va a ver cómo Danna, que está en una mesa contigua, logró guardar sus piezas. Regresa, saca todas las piezas para volver a empezar y logra formar tres capas. La que queda arriba nuevamente está hecha de los dos triángulos grandes del segundo tangram.

Para hacer la última capa, Juan David toma otra vez el triángulo mediano y nuevamente pone el ángulo recto en la esquina del molde. Pone más piezas, no resulta, y prueba otra manera de hacer la configuración en la que el lado mayor del triángulo mediano coincide con el lado del molde. Es decir, ahora el ángulo recto de la pieza está en el centro, no en la esquina. Pero la observadora le sugiere que esa pieza no va ahí, y la quita. Juan David pone otras piezas, no consigue formar el cuadrado y deshace todo, deja el molde vacío para empezar de nuevo.

Por petición de la observadora, Luis viene a ayudar a Arturo y Juan David. Arturo lo detiene para probar una anticipación que ha hecho y logra formar dos capas. Para la tercera, Luis pone por un segundo el triángulo mediano haciendo coincidir el lado mayor con el lado del cuadrado del molde, pero inmediatamente lo mueve para acomodar el ángulo recto en la esquina del molde. Él no había visto que sus compañeros ya habían hecho antes eso mismo, y además ahora la capa que está debajo no está hecha de los triángulos grandes. Por eso interpretamos que la selección del ángulo recto tiene que ver con construir la esquina del cuadrado del molde, más que con conservar la orientación de los triángulos grandes. Incluso después casi forman una capa con cuatro cuadrados, uno de cada tangram, otro hecho por dos triángulos pequeños y se detienen antes de hacer el último. Es decir, tienen muy presente la forma cuadrada del molde. Como no les resulta, quitan sus piezas e intentan nuevamente de otra manera. La discusión que más pesa en el equipo, y que proviene de una preocupación de Arturo, es que éste considera que les faltan triángulos chicos. De manera similar a lo que explico en un apartado anterior –el ejemplo de Axel y Jorge-, Arturo identifica que los triángulos chicos son los más fáciles de acomodar y que muchas veces agotan estas piezas demasiado pronto, con lo cual se vuelve imposible formar las siguientes capas. Ellos no reparan en el asunto de la manera de orientar el triángulo mediano, así que repetidas veces lo hacen de la misma forma.

Arturo pide ayuda a Danna y nuevamente vacía la caja. Arturo y Juan David observan a Danna, quien hace dos capas con todas las piezas de un tangram. En la segunda, el triángulo mediano queda con el ángulo recto en el centro, y uno de los triángulos chicos con el ángulo recto en la esquina, como en la imagen 23. Juan David se dispone a sacar otra vez todas las piezas del molde porque le interesa ver cuántas utilizó Danna, pero Arturo lo detiene. Para guardar el segundo tangram, Arturo hace una capa con los dos triángulos grandes y comienza la segunda nuevamente eligiendo un ángulo recto para la esquina del cuadrado del molde, pero esta vez no del triángulo mediano sino del pequeño, como lo hizo Danna. Ella observa a sus compañeros, quienes tratan de colocar el resto de las piezas, pero no lo consiguen. Finalmente, Danna saca las piezas que tienen en la última capa y la vuelve a hacer. Comienza por el triángulo mediano de manera que su lado mayor cubra el lado del molde y termina la capa con el resto de las piezas. Arturo se sorprende, cierra la caja y se la lleva a entregar a la maestra.

En resumen, Arturo, Juan David y Luis intentan en total cinco veces formar una capa partiendo de hacer una esquina del cuadrado con el ángulo recto del triángulo mediano y fracasan. Finalmente, Danna tiene éxito al empezar con la misma pieza, pero eligiendo el lado largo en lugar del ángulo recto. La actividad hace que los alumnos reparen en las características internas de cada pieza, más específicas que su forma genérica: lo que está en juego, aunque no se explicite, ya no es sólo que el triángulo es una figura de tres lados o que tiene cierta forma, sino que ese triángulo en particular tiene dos lados iguales y uno distinto, además de un ángulo recto y dos agudos.

La forma de una configuración

En la clase 3, frente a la segunda tarea de formar la figura del compañero sobre una hoja blanca, Irving hace un "pato robot", cuyos bordes no coinciden para nada con los de la plantilla, pero la forma es similar (Imágenes 25 y 26).

IMAGEN 25

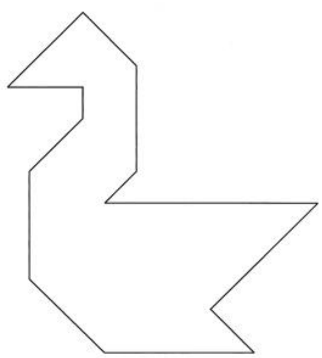


IMAGEN 26

No parece afectarle que Nahomi le cuestione si "eso es un pato ¿en serio?". Él explica que Daniela "hizo primero pero no me enseñó su figura y entonces estoy haciendo a lo loco el pato". Es decir, como la tarea es compleja y no tiene posibilidades de resolverla mirando la configuración de su compañera, él decide simplificarla: mantener cierta similitud con la forma, pero no ceñirse estrictamente a ella. Así tiene más libertad para colocar las piezas. De hecho, después de esta primera exploración, él arma bastante rápido el pato sobre la plantilla y luego traslada correctamente las piezas a la hoja blanca. Esa primera búsqueda más básica le permitió después hacer la configuración exacta que se le demandaba. El ejemplo de Irving muestra cómo a veces es útil para los alumnos combinar las piezas siguiendo cierta intuición y ver qué pasa, sin preocuparse mucho por la forma precisa.

Bárbara, frente a la misma tarea, trata de reproducir la forma exacta del gato en la hoja blanca, usando la plantilla como referencia. Inicia poniendo directamente algunas piezas sobre la hoja blanca, pero duda de que la cuarta pieza esté orientada correctamente (Imagen 27). Con su dedo, traza sobre la plantilla el contorno que tendría el triángulo grande en la posición en que lo ha puesto en la hoja blanca, y decide sustituir esa pieza por otras que tampoco la convencen. Entonces da un giro a la estrategia, acomoda los dos triángulos grandes sobre la plantilla (Imagen 28) y, una vez que logra la posición correcta de ambos, los traslada juntos a la hoja blanca.

IMAGEN 27

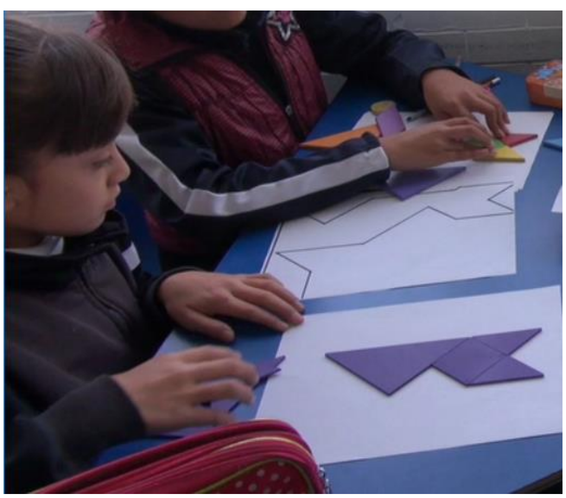


IMAGEN 28

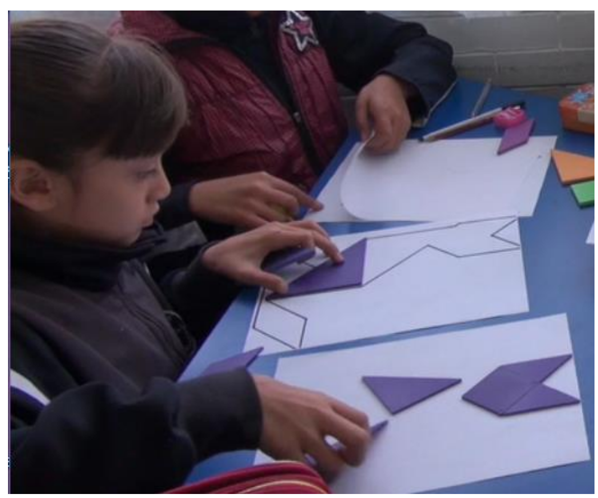
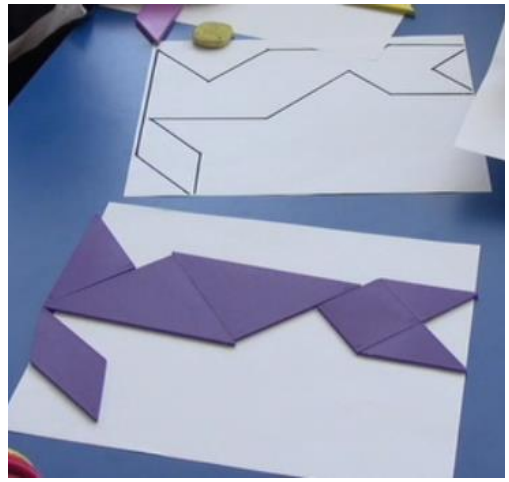


IMAGEN 29 **IMAGEN 30**



Al hacerlo, pierde la conjugación de las dos piezas y vuelve a ponerlas sobre la plantilla. Esta vez logra trasladarlas correctamente a la hoja blanca (Imagen 29). Cuando Daniela mira lo que hace Bárbara, piensa que ese recurso de regresar con las piezas a la plantilla no está permitido: "¡Oye! No, eso no se hace [Hace con la mano un gesto de regaño]… [A la observadora] ¡Ay ya hizo trampa!". Bárbara le contesta "no es cierto", no parece afectarle la sanción en este momento. Intenta acomodar una de las dos piezas que faltan, el triángulo mediano, y al no lograrlo[6], quita los dos triángulos grandes. Después de girarlos y reflejarlos varias veces, logra conjugarlos con el triángulo mediano de una manera que no embonaría en la plantilla, pero es bastante similar (Imagen 30). Al hacerlo, regresa el triángulo mediano a la plantilla para confirmar su posición, como antes con los triángulos grandes, pero lo hace muy rápidamente y no lo superpone en la plantilla, sino que lo acerca a ella, probablemente por la sanción anterior de Daniela. Una vez que tiene todas las piezas colocadas en la hoja blanca, confirma con su dedo que al recorrer el contorno de la configuración en la hoja blanca describa el trayecto del contorno de la plantilla. Es decir, se apoya en la percepción táctil (PERRIN-GLORIAN y GODIN, 2018). Con eso se queda tranquila. En efecto, es difícil notar que lo que no ha reproducido es la longitud de cada lado del contorno de la figura original. Los alumnos tienden a interpretar las figuras como bidimensionales, como un espacio delimitado por curvas cerradas. Pretender que Bárbara considere la longitud de los lados

[6] Lo que se necesita es girar el triángulo, pero Bárbara no lo hace. Éste es otro ejemplo de que las transformaciones necesarias a una pieza para modificar su posición suponen un aprendizaje para los alumnos, como expliqué anteriormente.

del contorno supone priorizar entonces la unidimensionalidad como definitoria de la figura, lo cual demanda una construcción considerablemente compleja (DUVAL y GODIN, 2005). Daniela, que en ningún momento pone las piezas sobre la hoja con los bordes trazados, hace exactamente la misma configuración que Bárbara.

En algún momento Daniela también reclama a Irving, quien forma el pato directamente sobre la plantilla: "¡Ah no! pero lo tiene que hacer en su hoja (…) blanca". Es decir, para Daniela, la figura original se puede usar estrictamente como referencia visual, no se pueden colocar piezas sobre ella. Es interesante cómo la alumna agrega una restricción a la consigna, que ella misma tiene que sortear y que probablemente afecta un poco la resolución de Bárbara, pero no la de Irving. Si esta nueva restricción puede considerarse como una norma del contrato didáctico[7], es un ejemplo de que dichas normas no siempre son compartidas por todos los alumnos, es decir, no es posible asumir que en cierto momento de la clase hay UN contrato didáctico funcionando (MENDOZA, 2018).

La resolución de Bárbara muestra, por un lado, la mayor dificultad de hacer una configuración sobre la hoja blanca respecto a hacerla sobre la plantilla, pues en ésta última el contorno permite verificar de manera más inmediata. Por otro lado, tener el contorno disponible como referencia, usarlo para poner ahí las piezas y luego trasladarlas a la hoja blanca es un recurso valioso y a la vez nada sencillo: es fácil perder la posición que se ha logrado en la plantilla cuando no se consigue conjugarla con el resto de las piezas, o simplemente al trasladarlas. Cuando los alumnos no tienen disponible la plantilla a la vista o no la usan, la tarea se vuelve aún más difícil, como se puede ver en el "pato robot" de Irving. Esto ocurre incluso con alumnos que antes armaron la misma figura sobre el contorno, pero ya no tienen la plantilla a disposición.

Distintas configuraciones con el mismo contorno

Leo y Arturo se sorprenden porque hay muchas maneras de formar una de las figuras de la clase 4:

> Arturo: es que hay muchas formas
> Leo: Miss es que hay muchas muchas maneras puedo hacer que me sobre éste [muestra el cuadrado] o que me sobre éste [muestra el romboide] o que me sobre ÉSTE [muestra el triángulo mediano]

[7] Brousseau (2007) explica que la clase funciona como si existiera una serie de expectativas entre alumnos y maestro, la mayoría de las veces implícitas y naturalizadas, en relación con el funcionamiento del conocimiento que es objeto de estudio en la clase. A estas expectativas mutuas se les llama *contrato didáctico.*

Los alumnos están sorprendidos porque una misma plantilla se puede rellenar de distintas formas y entonces la pieza que sobra puede variar. Después siguen explorando y encuentran que hay incluso distintas formas de armar la figura haciendo que sobre la misma pieza.

CONCLUSIÓN

La actividad de las configuraciones geométricas confiere al tangram un papel muy específico: el de funcionalizar las características geométrico-espaciales de las piezas y las plantillas, hacerlas emerger como un recurso para tomar decisiones en una situación problemática (BLOCK, 2018). En efecto, el problema de rellenar plantillas obliga a pensar en las relaciones entre las piezas y entonces las características de cada una se vuelven funcionales por oposición a las demás: que un triángulo sea mucho más grande que las demás piezas la vuelve muy difícil de colocar al final, que un triángulo sea el más pequeño lo vuelve la pieza más fácil de poner, que el romboide no sea simétrico hace que a veces sea indispensable reflejarlo, que los lados de un triángulo tengan distinta medida importa cuando en cierta posición se ha dejado sin cubrir una parte del contorno de la plantilla, los vértices del contorno dan pistas sobre el ángulo de las piezas que hay que elegir en ese lugar, la forma de las piezas es relevante cuando hay que escoger la que cabe en cierta parte del contorno, que dos triángulos son iguales se vuelve visible cuando ocurre lo mismo al probar tanto uno como otro en la configuración.

Tres características de la actividad –y por consiguiente del material didáctico- son fundamentales para que ocurran las producciones de los alumnos que hemos reportado: a) trabajar con configuraciones, es decir, con varias figuras distintas de manera simultánea, en lugar de estudiar las figuras una por una de forma aislada; b) tener las plantillas en tamaño real y no a escala, y poder colocar las piezas sobre la plantilla, permite a los alumnos verificar sus anticipaciones y modificar el arreglo, la posición y orientación de las piezas si es necesario; y c) la posibilidad de mover las piezas, en lugar de tenerlas fijas en una hoja de papel. Estas características han sido destacadas en distintos estudios (DUVAL y GODIN, 2005; PERRIN-GLORIAN y GODIN, 2018). Dentro de las actividades que cumplen estas tres condiciones, también hay variables didácticas, es decir, características que hacen más o menos compleja la tarea:

i. El “gato” resultó más fácil que el “pato” y éste más fácil que armar el cuadrado. Es decir, cuando la plantilla indica claramente el lugar en el que van algunas piezas, la actividad es más accesible. Más aún si se puede establecer una analogía entre una pieza y el objeto que ella representa en la plantilla (la oreja o la cola del gato)

ii. Las plantillas diseñadas de manera que los triángulos grandes sólo caben en un lugar muy específico hacen que comenzar por colocar estas dos piezas sea prácticamente indispensable. Es el caso de la plantilla “C” de la clase 4.

iii. El romboide, al no ser simétrico, es más difícil de colocar que las piezas que sí lo son. Y las plantillas que indican claramente dónde va esa pieza son más sencillas.

Nos interesa destacar también que estas actividades con el tangram permiten, más que otras, el involucramiento de los alumnos. En los ejemplos que mostramos aparecen resoluciones de siete niños que presentan “rezago” educativo: Irving, Miranda, Nahomi, Ian, Axel, Jorge y Leo. Todos ellos tienden a participar muy poco en otras clases que observé, muchas veces actuando a ciegas (“wildguesswork”, MC DERMOTT, 2001) En las dos clases que analizamos aquí, se trata de problemas que pueden abordar y el material ofrece la posibilidad de poner a prueba y modificar sus anticipaciones. Por eso la participación de estos alumnos es distinta. Y las interacciones entre ellos también. En ejemplos como el de Axel y Jorge los alumnos se reconocen más como interlocutores mutuamente.

Realizar estas actividades, en la experiencia que nosotros analizamos, requiere lograr condiciones que rebasan el ámbito de decisiones de la maestra y sus alumnos en el tiempo de clase y en el aula. En particular, a la maestra le preocupa que al manipular el tangram no queda registro de la actividad de los alumnos, y por lo tanto no hay evidencia para los padres del trabajo realizado. Dado que esto suele derivar en un cuestionamiento de su propio trabajo docente, ella plantea la segunda tarea, de reproducir la configuración de un compañero en una hoja blanca, precisamente con la intención de pegar esa hoja en el cuaderno y dejar evidencia a los padres de familia. Esta tarea, como ya mostramos, resulta más difícil para los alumnos y les toma el doble de tiempo que la de hacer la configuración sobre la plantilla. Además, en una de las reuniones que regularmente tienen lugar con los padres, ella dedicó un tiempo a explicarles las actividades del tangram y su potencial didáctico, lo cual al parecer convenció a varios de ellos. En suma, el uso de un material que prioriza la acción de los alumnos, sobre la cual hay poco registro escrito y verbal, requiere el despliegue de recursos para generar este registro: necesita ser legitimada frente a otros actores. Por otro lado, la maestra pospuso dos semanas estas actividades respecto a la planeación que originalmente había hecho, pues el material se encontraba en otra sala a cargo de otra maestra, que tenía en ese tiempo licencia de trabajo. Finalmente, fue necesario hacer las plantillas en tamaño real, para que los alumnos pudieran sobreponer ahí las piezas. Esta decisión puede ser tomada por maestros que han tenido una formación que les permite entender por qué vale la pena dedicar un tiempo extra considerable a confeccionar dichas plantillas: los tangram comerciales se venden con plantillas hechas a escala, a un tamaño muy pequeño, y los docentes suelen usarlos así. El resultado es que pronto desisten, porque las actividades resultan demasiado difíciles para los alumnos. Resumiendo, la posibilidad de utilizar este material para estas actividades específicas pasa por garantizar condiciones institucionales tanto en términos prácticos como de legitimación del trabajo de la docente.

La manera en que la actividad del tangram aumenta la participación de los alumnos y también las interacciones entre ellos, nos lleva a inclinarnos por las posturas que no contraponen la interacción alumno-problema a la interacción alumno-alumno. Algunos trabajos situados en la didáctica de las matemáticas parecen priorizar el diseño de situaciones didácticas para favorecer una “adaptación matemática” que se opone a una “adaptación social”. Otros estudios, hechos desde perspectivas socioculturales, dejan de lado la tarea académica y sostienen, por ejemplo, que el éxito o fracaso escolar dependen primordialmente del grado de degradación de la que son objeto los alumnos (MCDERMOTT, 2001). En cambio, otros trabajos, desde ambas perspectivas, insisten en considerar una relación más dialéctica entre la tarea académica y las interacciones sociales (ERICKSSON, 1982; SADOVSKY, SESSA, 2005; CAMBRIGLIA, 2018), posición por la que ahora nos inclinamos: en algunos ejemplos que mostramos se puede ver que, ante un problema que regresa información a los alumnos, ellos socializan y discuten esa información. Es decir, una fértil interacción con el problema desencadena interacciones sociales a propósito de la resolución y estas discusiones a su vez modifican las acciones de los alumnos sobre la tarea.

BIBLIOGRAFÍA

BLOCK SEVILLA, David. La enseñanza de las matemáticas en la reforma curricular de 1993 en México. Algunas reflexiones 25 años después. En: ÁVILA, Alicia (Coord.). **Rutas de la Educación Matemática.** Primera edición. Ciudad de México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., 2018, 363. Disponible en: https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/downloads/rutas-de-la-educacion-matematica-30/. Fecha de consulta: 29 de junio 2019.

BLOCK, David y al. La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. **Revista Mexicana de Investigación Educativa**, México, *12*, 33, 731-762, abril-junio 2007. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v12n33/1405-6666-rmie-12-33-731.pdf. Fecha de consulta: 29 de junio 2019.

BROUSSEAU, Guy. **Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas**. Primera edición. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2007, 125.

CAMBRIGLIA, Verónica. **Emergentes colectivos de generalización en la entrada al álgebra.** Tesis de doctorado. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires, 2018, 169.

DUVAL, Raymond; GODIN, Marc. Les changements de regard nécessaires sur les figures. **Grand N,** Francia, 76, 7-27, 2005. Disponible en: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/76n2_1554801689010-pdf. Fecha de consulta: 30 de junio 2019.

ERICKSSON, Frederick. Classroom Discourse as Improvisation: relationship between academic task structures and social participation structures in lessons. En: Wilkinson, L.C. (Ed.) **Communicating in the Classroom**. Primera edición. Nueva York: Academic Press. 1982.

FREGONA, Dilma. **Les figures planes comme << milieu >> dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques.** Tesis de doctorado. Burdeos, Francia : L'Université Bordeaux I, 1995, 416.

FUENLABRADA, Irma y al. **Juega y aprende matemáticas. Actividades para divertirse y trabajar en el aula.** Primera edición. México: Secretaría de Educación Pública, 1991, 93.

LOZANO SUÁREZ, María de los Dolores (Coord.) **Matemáticas. Primer grado.** Primera edición. México: Secretaría de Educación Pública, 2018, 221. Disponible en: https://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=2402. Fecha de consulta: 30 de junio 2019.

MC DERMOTT, Ray. La adquisición de un niño por una discapacidad de aprendizaje. En: CHAIKLIN, Seth; LAVE, Jean (Coords.). **Estudiar las prácticas. Perspectivas sobre actividad y contexto**. Buenos Aires: Amorrortu editores, 2001.

MENDOZA VON DER BORCH, Tatiana. Aprender del problema y de las formas de interacción. La construcción de conocimientos relativos al porcentaje en clases de secundaria. **Revista Colombiana de Educación** (Número especial Equidad y Educación Matemática)**,** Bogotá, 74, 133-154, primer semestre de 2018. Disponible en: https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/RCE/article/view/6901/5632. Fecha de consulta: 30 de junio 2019.

O'CONNOR, Mary Catherine; MICHAELS, Sarah. Shifting participant frameworks: orchestrating thinking practices in group discussion. En: HICKS, Deborah (Ed.). **Discourse, learning and schooling.** Cambridge: Cambridge University Press, 1996. Disponible en: https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.1017/CBO9780511720390.003. Fecha de consulta: 26 de diciembre 2019.

PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma; SADOVSKY, Patricia. **Organización de las interacciones de los alumnos entre sí y con el maestro**. Primera edición. Argentina: Matemática y su enseñanza**.** 1994.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne; GODIN, Marc. **Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège**. Francia : HAL-archives-ouvertes, 2018, 42. Disponible en: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837/document. Fecha de consulta: 30 de junio 2019.

ROCKWELL, Elsie, REBOLLEDO, Valeria (Coords.) **Yoltocah. Estrategias didácticas multigrado.** Primera edición. México: Elsie Rockwell, 2016, 216. Disponible en: http://yoltocah.mx/. Fecha de consulta: 30 de junio 2019.

ROCKWELL, Elsie y al. Mediating research and practice: the dilemmas of designing didactic sequences by integrating teacher knowledge and research on teaching. **Revue Française de Pédagogie**, Francia, 201, 41-52, octubre-noviembre-diciembre 2017.

SADOVSKY, Patricia; SESSA, Carmen. La interacción adidáctica con los procedimientos de los otros en la transición aritmética-álgebra: un *milieu* para la emergencia de nuevas preguntas. **Springer Verlag**, 2005.

TRINIDAD JIMÉNEZ, Carlos; SARAO PÉREZ, Wilber. El papel de la escuela en la adquisición de materiales didácticos en educación primaria. **RIDPHE_R Revista Iberoamericana Do Patrimônio Histórico-Educativo**, Campinas (SP), 5, 1-19, e019023, diciembre 2019. Disponible en: https://econtents.bc.unicamp.br/inpec/index.php/ridphe/article/view/9922. Fecha de consulta: 25 de diciembre 2019.

VECINO RUBIO. Didáctica de la geometría en la educación primaria. En: CHAMORRO, María del Carmen (Coord.). **Didáctica de las matemáticas.** Madrid, España: Pearson Educación, 2003.

Recebido em: 01 de julho de 2019
Aceito em: 21 de dezembro de 2019