

Sobre os spinors e a estrutura do espaço-tempo

Roldão da Rocha Jr.

Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, 13083-970, Campinas, São Paulo, Brasil
e-mail: roldao@ime.unicamp.br

Resumo

Introduzimos o formalismo dos spinors a partir da análise da estrutura do cone de luz no espaço de Minkowski. Construímos as transformações de Lorentz a partir de transformações spinoriais e formulamos alguns conceitos geométricos associados à estrutura do cone de luz essencialmente a partir dos spinors. Construímos os spinors de Weyl e de Dirac a partir das representações não-equivalentes do grupo $SL(2, \mathbb{C})$. Mostramos como alguns conceitos utilizados na física podem ser formulados diretamente a partir da estrutura spinorial deste formalismo.

1 Introdução

A teoria dos spinors foi desenvolvida de modo praticamente independente por físicos e matemáticos. De um lado E. Cartan, em 1913, escreveu um tratado sobre a teoria dos spinors [1] após tê-los descoberto originalmente como entidades que carregam a representação dos grupos de rotações em um espaço de dimensão finita¹. Do outro lado os spinors foram introduzidos na física teórica com o intuito de se descrever a função de onda de sistemas quânticos com spin. Primeiramente, W. Pauli, em 1926, descreveu a função de onda de um elétron com spin por um spinor de duas componentes em sua teoria não-relativística. Mais tarde, em 1928, P. A. M. Dirac utilizou um spinor de quatro componentes para a descrição de sua teoria relativística. Com a crescente gama de aplicações dos spinors em teorias físicas, a teoria dos spinors foi formalizada por Infeld e van der Waerden, entre 1929 e 1933, mas seu formalismo não é simples de se aprender, mesmo atualmente. Os spinors são entidades fundamentais na física para se descrever a matéria, já que os léptons e os quarks são férmions de spin $1/2$, e férmions são descritos por funções de onda que são, essencialmente, spinors.

R. Penrose [3] defende a idéia de que existem estruturas (os spinors) mais primitivas que os pontos no espaço-tempo de Minkowski (\mathbb{M}), no sentido em que os pontos de \mathbb{M} (descritos por vetores) podem ser formalmente construídos a partir dos spinors. Motivados por isso introduzimos a descrição dos vetores em \mathbb{M} a partir de spinors. Na seção 2 obtemos uma relação entre as coordenadas de um vetor que descreve eventos em \mathbb{M} e as coordenadas da projeção estereográfica de uma seção do cone de luz no plano complexo. Tais coordenadas são componentes de um spinor (ou *vetor-spin*, no jargão de Penrose). Introduzimos o conceito de *espaço projetivo*. Vemos que os spinors se transformam pela ação do grupo² $SL(2, \mathbb{C})$ e vemos também a relação entre o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e as transformações de Lorentz, e como a geome-

tria do espaço está relacionada aos autoestados de spin utilizados na mecânica quântica. Descrevemos rotações espaciais via transformações sobre o espaço dos spinors, usando ângulos de Euler. Ilustramos alguns desses conceitos na mecânica quântica. Na seção 3 introduzimos o conceito de *índice abstrato* construímos a métrica spinorial a partir de uma base-spin, formada por dois spinors. Na seção 4 construímos vetores nulos e a métrica de \mathbb{M} a partir dos spinors. Nas seções 5 e 6 descrevemos os quatro tipos de spinors de Weyl, o spinor de Dirac e como esse último, fundamental na mecânica quântica relativística, é formulado a partir dos spinors de Weyl. Finalmente, na seção 7 formulamos alguns conceitos geométricos da teoria de Penrose, dentre eles a bandeira-nula, que dá diretamente um caráter geométrico ao spinor.

2 A geometria dos spinors

A dificuldade de se descrever algumas teorias físicas perante transformações de coordenadas *a la* Galileu foi contornada pela teoria da relatividade especial (SR). As chamadas transformações de Lorentz são construídas com base em uma nova classe de referenciais inerciais a partir dos postulados da SR. O espaço a partir do qual a SR é formulada é o espaço-tempo de Minkowski (\mathbb{M}). Tal espaço é descrito pelo espaço pseudoeuclidiano $\mathbb{R}^{1,3}$. Dado um vetor $\vec{x} = (X, Y, Z, cT)$, o que difere $\mathbb{M} \simeq \mathbb{R}^{1,3}$ do espaço euclidiano \mathbb{R}^4 é que neste podemos definir uma forma quadrática $\vec{x} \cdot \vec{x} = X^2 + Y^2 + Z^2 + c^2T^2$, enquanto naquele definimos $\vec{x} \cdot \vec{x} = c^2T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2$. Assim a distância entre dois pontos distintos (que são descritos por vetores em \mathbb{M}) pode ser nula, positiva ou negativa. Considerando agora a métrica em \mathbb{M} , se $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ (< 0) o vetor \vec{x} é dito *tipo-tempo* (*tipo-espaço*). Se $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$ então \vec{x} é dito um *vetor-nulo*.

Consideremos uma onda esférica se propagando a par-

¹Ainda hoje essa é a definição “clássica” de spinor. Por exemplo os *spinors de Weyl* são elementos do espaço vetorial complexo bidimensional (\mathbb{C}^2) que carrega as representações $D^{(0,1/2)}$ e $D^{(1/2,0)}$ do grupo $SL(2, \mathbb{C})$. Já os chamados *spinors de Pauli* são elementos de \mathbb{C}^2 que carregam a representação do grupo $SU(2)$. Grupos e representações são conceitos desenvolvidos ao longo do presente artigo. Para o leitor leigo é sugerido uma leitura em [2].

²O grupo $SL(2, \mathbb{C})$ é o grupo das matrizes 2×2 complexas com determinante igual a 1.

tir da origem de um referencial K que tem coordenadas (X, Y, Z, cT) . A frente de onda possui equação

$$c^2T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0. \quad (1)$$

O fato empírico de que a velocidade da luz (c) é constante em qualquer referencial inercial implica que, em qualquer outro referencial K' (que coincida com K em $t = 0$) com coordenadas (X', Y', Z', T') , a equação da frente de onda é $c^2T'^2 - X'^2 - Y'^2 - Z'^2 = 0$. As transformações de Lorentz são definidas como sendo aquelas que deixam a forma $\vec{x} \cdot \vec{x}$ invariante e agem como $\vec{x}' = L\vec{x}$.

O cone de luz é a superfície em \mathbb{M} descrita pela equação $c^2T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$. Claramente o cone de luz é gerado por todos os vetores-nulos que partem da origem \mathcal{O} de \mathbb{M} . As direções nulas são as semi-retas em \mathbb{M} geradas por vetores nulos, que passam pela origem \mathcal{O} . Dizemos que uma direção nula aponta para o futuro (passado) se ela é direcionada positivamente (negativamente) em relação ao eixo temporal. A partir de agora consideraremos sem perda de generalidade $c = 1$, para facilitar a notação.

O espaço cujos elementos são as direções nulas que apontam para o futuro (passado) serão denotados S^+ (S^-). Esses espaços podem ser representados em coordenadas (T, X, Y, Z) pelas intersecções S^+ (S^-) do cone de luz do futuro (passado) com o hiperplano³ $T = 1$ ($T = -1$), e como tal, é uma casca esférica⁴. No espaço euclideano, S^\pm é uma esfera com equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (2)$$

onde reservamos a notação (x, y, z) para coordenadas em S^\pm . Tudo isso pode ser melhor visto a partir da figura 1 abaixo:

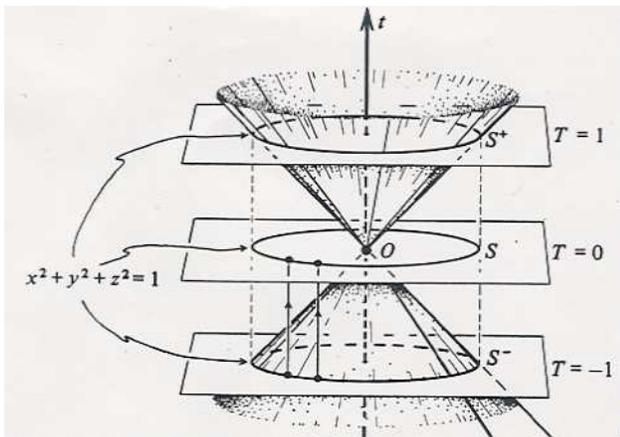


Figura 1: A estrutura do cone de luz e suas intersecções.

³Escolhe-se $T = \pm 1$ para fins de normalização em alguns cálculos futuros.

⁴Tal superfície é denominada *esfera de Riemann*.

⁵A projeção estereográfica é um mapa injetivo que faz corresponder cada ponto da esfera de Riemann a um ponto do plano. Para resultados futuros é conveniente, ao invés de tomar a projeção estereográfica sobre o plano \mathbb{R}^2 , considerá-la sobre \mathbb{C} . Isso se justifica devido ao fato de que cada ponto do plano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser identificado como o ponto $x + iy \in \mathbb{C}$.

⁶Cada ponto de S^+ é levado em um único ponto do plano complexo.

Na figura acima mostramos a solução da eq. (1) para $T = \pm 1$, o que implica na eq. (2). Visto que essa última é invariante perante translação temporal, podemos tratar a superfície descrita pela eq. (2) em qualquer instante de tempo, muito embora ela seja obtida a partir do cone de luz em $T = \pm 1$. Enfatizamos ainda que o presente artigo formula, dentre outras coisas, a descrição de vetores nulos a partir dos spinors. Convém enfatizar que, embora esteja fora do escopo deste artigo, a descrição de vetores tipo-tempo e tipo-espaço por Penrose é feita a partir da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ em $T = 0$, de acordo com o que está ilustrado na figura 1. Tal superfície em $T = 0$ é primordial à generalização da presente teoria.

Mais geralmente, a direção de qualquer vetor nulo $\vec{x} \in \mathbb{M}$ com origem em \mathcal{O} pode ser representada por dois pontos, que são resultantes da intersecção de \vec{x} (que está sobre a casca do cone de luz) e os hiperplanos definidos pelas equações $T = \pm T_0$. A direção de \vec{x} que aponta para o futuro é representada pelo ponto $(X/\|T_0\|, Y/\|T_0\|, Z/\|T_0\|)$, para o caso em que considerarmos a seção transversal do cone de luz por um hiperplano $T = T_0$. O interior de S^+ (S^-) representa o conjunto das direções tipo-tempo que apontam para o futuro (passado).

Considerando S^+ , ao fazermos uma projeção estereográfica⁵ de tal esfera sobre o plano complexo obtemos uma representação dos números complexos mais o ponto no infinito, que corresponde ao pólo norte de S^+ . O que é crucial na projeção estereográfica é que tanto a esfera de Riemann quanto o plano complexo possuem duas dimensões, e por essa razão podemos substituir as coordenadas x, y, z em S^+ por um número complexo $\beta = X' + iY'$. Em relação à figura 2 abaixo, considere a semelhança entre os triângulos $\Delta P'CN$ e ΔPBN . No que diz respeito somente às coordenadas espaciais $(x, y, z) \simeq (x + iy, z)$, podemos ver que $\frac{\beta}{1} = \frac{x+iy}{1-z}$, o que resulta imediatamente em:

$$\beta = \frac{x + iy}{1 - z}. \quad (3)$$

Apenas invertendo a relação anterior via $\beta\bar{\beta} = \frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}$, obtemos

$$x = \frac{\beta + \bar{\beta}}{\beta\bar{\beta} + 1}, \quad y = \frac{\beta - \bar{\beta}}{i(\beta\bar{\beta} + 1)}, \quad z = \frac{\beta\bar{\beta} - 1}{\beta\bar{\beta} + 1}. \quad (4)$$

A correspondência entre os pontos de S^+ e o plano complexo é injetiva⁶ ao adicionarmos o ponto $\beta = \infty$ ao plano complexo e o fizermos corresponder ao pólo norte, que tem coordenadas $(1,0,0,1)$ em \mathbb{M} . Mas se quisermos evitar o uso

de tal ponto, torna-se conveniente associar aos pontos de S^+ não um número complexo β , mas um par deles⁷ (ξ, η) , onde

$$\beta = \xi/\eta. \quad (5)$$

Os pares (ξ, η) e $(\lambda\xi, \lambda\eta)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, representam o mesmo ponto em \mathbb{E}^+ e por isso tais coordenadas são chamadas *projetivas*. Essa denominação se baseia na definição de que, denotando $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$, o conjunto $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ de espaços unidimensionais de \mathbb{C}^n

$$\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) = \{\mathbb{C}x \mid x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0\} \quad (6)$$

é chamado *espaço projetivo*⁸ de dimensão $n - 1$ sobre \mathbb{C} .

Esses conceitos são utilizados diretamente em mecânica quântica quando se definem as *raias*, que é o conjunto de todos os estados quânticos a menos de um fator de fase global. Não existe uma correspondência injetiva entre estados físicos e vetores ψ de um espaço de Hilbert. Se ψ e ψ' são vetores unitários que diferem apenas por um fator de fase $e^{i\alpha}$, eles obviamente descrevem o mesmo estado, já que eles levam às mesmas previsões observáveis, por exemplo, medidas de probabilidade e valores esperados. Portanto todos os vetores no espaço unidimensional $\hat{\psi} = \{e^{i\alpha}\psi\}$ correspondem ao mesmo estado.

O “ponto” $\beta = \xi/\eta = \infty$ corresponde ao ponto de coordenadas $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. As equações (4) podem ser reescritas como

$$x = \frac{\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}}, \quad y = \frac{\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}}{i(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})}, \quad z = \frac{\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}}. \quad (7)$$

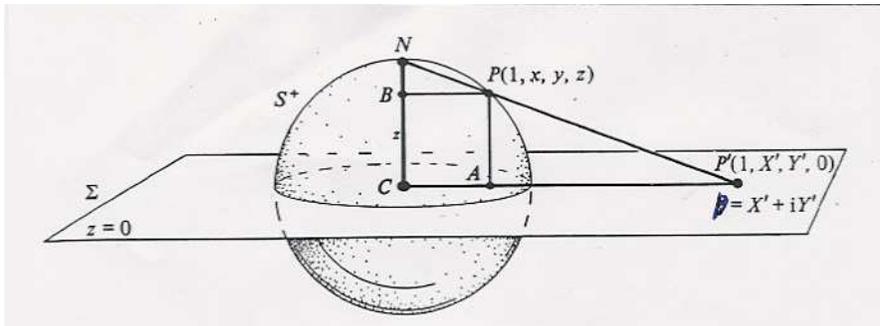


Figura 2: Projeção estereográfica da esfera de Riemann a partir do pólo norte no plano complexo.

⁷Com a condição de que ambos não sejam simultaneamente nulos.

⁸Dessa maneira linhas no espaço \mathbb{C}^n são representadas como pontos no espaço $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

⁹Podemos ter uma visão mais intuitiva sobre as transformações de Möbius: imaginemos um observador situado em um ponto do espaço-tempo observando o hemisfério norte da esfera celestial. Suponhamos que ele trace a posição angular das estrelas sobre uma esfera. Se um segundo observador passasse pelo mesmo ponto no mesmo tempo, mas com uma velocidade relativa não-nula com relação ao primeiro observador, então, com os efeitos da aberração, ele colocaria as estrelas em diferentes posições na esfera. Porém as diversas posições dos pontos sobre a esfera estão relacionados pelas *transformações de Möbius* (eq. (10)). Tais transformações formam o grupo que preserva a estrutura da esfera de Riemann. Assim o espaço dos raios de luz que passam por um ponto do espaço-tempo é, de modo natural, uma esfera de Riemann.

O ponto $P = (1, x, y, z)$ é um ponto arbitrário da secção transversal do cone de luz e representa uma direção nula que aponta para o futuro. Essa direção é representada por qualquer outro ponto da linha OP . Em particular, tome o ponto R sobre OP multiplicando P pelo fator $(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})/\sqrt{2}$. Tal escolha é feita para eliminar os denominadores das eqs.(7). Portanto R tem coordenadas

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}), & Y &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}), \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}), & T &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}). \end{aligned} \quad (8)$$

Ao contrário de P , o ponto R não é independente da mudança de escala real de (ξ, η) , a saber, $(\xi, \eta) \rightarrow (r\xi, r\eta)$, $r \in \mathbb{R}$, embora seja independente da mudança de fase $(\xi, \eta) \rightarrow (e^{i\theta}\xi, e^{i\theta}\eta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Considere a seguinte transformação linear complexa:

$$\begin{aligned} \xi &\mapsto \tilde{\xi} = \alpha\xi + \mu\eta, \\ \eta &\mapsto \tilde{\eta} = \gamma\xi + \delta\eta, \end{aligned} \quad (9)$$

onde $\alpha, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ são tais que $\alpha\delta - \mu\gamma \neq 0$. Tal transformação pode ser escrita como

$$\beta \mapsto f(\beta) = \frac{\alpha\beta + \mu}{\gamma\beta + \delta}, \quad (10)$$

e é dita uma *transformação de Möbius*⁹.

As transformações de Möbius são uma classe particular das *transformações conformes*, que por definição são aquelas que preservam a estrutura do cone de luz. As transformações conformes englobam rotações, translações, dilatações e inversões.

Normalizamos a relação (9) através da *condição unimodular* $\alpha\delta - \mu\gamma = 1$. As eqs. (9) sujeitas à condição unimodular são chamadas *transformações spinoriais*, onde $\beta = \xi/\eta$ está relacionado aos vetores (nulos) de Minkowski através das eqs.(8). Essas equações implicam que

$$\beta = \frac{X + iY}{T - Z} = \frac{T + Z}{X - iY}. \quad (11)$$

Definimos a *matriz spinorial* $\mathbf{A} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 1. \quad (12)$$

A última condição corresponde à condição de normalização. Em termos de \mathbf{A} as eqs. (9) tomam a forma

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Note que duas matrizes spinoriais $\{\mathbf{A}, -\mathbf{A}\}$ dão origem à mesma transformação de $\beta = \xi/\eta$, embora definam duas transformações spinoriais distintas.

A eq. (8) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T + Z & X + iY \\ X - iY & T - Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Dessa maneira vemos os efeitos da transformação spinorial, a menos de um fator $1/\sqrt{2}$, como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T + Z & X + iY \\ X - iY & T - Z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \tilde{T} + \tilde{Z} & \tilde{X} + i\tilde{Y} \\ \tilde{X} - i\tilde{Y} & \tilde{T} - \tilde{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} T + Z & X + iY \\ X - iY & T - Z \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

Tal transformação sobre o ponto $U = (T, X, Y, Z)$ é real e preserva a estrutura do cone de luz $T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$, o que é facilmente visto devido à propriedade de produto de determinantes. Dessa maneira a relação acima define uma *transformação de Lorentz restrita*.

Proposição 1.1 ► *Toda transformação spinorial (TS) corresponde a uma única transformação de Lorentz (TL) restrita, e cada TL corresponde a precisamente duas TSs, uma sendo o negativo da outra.* ◀

Com isso notamos que o grupo $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ é o recobrimento duplo do grupo $\text{SO}_+(1, 3)$, que é mais conhecido como *grupo de Lorentz restrito*¹⁰.

Proposição 1.2 ► *Toda TS unitária¹¹ corresponde a uma única rotação própria¹² de S^+ , e toda rotação própria de S^+ corresponde a exatamente duas TSs unitárias, uma sendo o negativo da outra.* ◀

Essa última proposição se baseia no grupo

$$\text{SU}(2) = \{\mathbf{A} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \mid \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = 1 \text{ e } \det \mathbf{A} = 1\}, \quad (15)$$

que é o recobrimento duplo do grupo das rotações $\text{SO}(3)$ em S^+ . De fato, a coordenada temporal T é invariante perante uma transformação spinorial unitária, já que o traço de uma matriz é sempre invariante sob transformações unitárias. Utilizando a parametrização das rotações via ângulos de Euler [4], qualquer transformação de S^+ pode ser viabilizada por meio de uma rotação de um ângulo ψ em torno do eixo z , seguida por uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo original y e finalmente por uma rotação de um ângulo ϕ em torno do eixo x . Mostraremos que essas rotações elementares podem ser representadas por TSs unitárias. Segue-se daí que qualquer rotação própria de S^+ pode ser representada dessa maneira, já que o produto de matrizes unitárias resulta em uma matriz unitária. A rotação de S^+ em torno do eixo z por um ângulo ψ surge naturalmente através da rotação do plano complexo, pela origem, por um ângulo ψ . Isso é obtido pela transformação $\tilde{\beta} = e^{i\psi}\beta$, ou representando por TSs, escrevemos:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Agora dizemos que uma rotação de \mathbb{E}^+ por um ângulo θ em

¹⁰O grupo $\text{SO}_+(1, 3)$ é o grupo das rotações em no espaço de Minkowski, que podem ser vistas como as rotações mais os *boosts* (transformações de velocidade ou, de modo equivalente, rotações hiperbólicas) no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Além disso, $\text{SO}_+(1, 3)$ é um grupo de simetria fundamental da física do espaço-tempo e relaciona observadores com velocidades diferentes.

¹¹Denotando \mathbf{A}^\dagger o hermiteano (\mathbb{C} -conjugado transposto) de \mathbf{A} , uma transformação \mathbf{A} é dita *unitária* se $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = 1$.

¹²Qualquer operação no espaço-tempo de Minkowski é dita *própria* se preserva orientação do espaço-tempo.

torno do eixo y é representado por

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Facilmente se verifica que essa TS transforma o vetor de coordenadas $(1, 0, 0, 1)$ no vetor $(1, \sin \theta, 0, \cos \theta)$. Por um argumento semelhante, podemos ver que a TS

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \cos \phi/2 & i \sin \phi/2 \\ i \sin \phi/2 & \cos \phi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (18)$$

corresponde a uma rotação de um ângulo ϕ em torno do eixo x . Com isso acabamos de demonstrar a proposição (1.2) e podemos exibir a matriz spinorial que corresponde a uma rotação pelos ângulos de Euler (θ, ϕ, ψ) :

$$\mathfrak{F}(\theta, \phi, \psi) = \pm \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\phi+\psi)/2} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{i(\phi-\psi)/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi-\psi)/2} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi+\psi)/2} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Os elementos da matriz acima são os parâmetros de Cayley-Klein [4].

Na mecânica quântica, a função de onda $|\psi\rangle$ de uma partícula de spin $1/2$ é a superposição linear

$$|\psi\rangle = \xi |+\rangle + \eta |-\rangle, \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}, \quad (20)$$

de dois vetores que formam a base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ dos autostados de spin. Com a correspondência

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

vemos que

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Nesse sentido, os números complexos ξ e η podem ser vistos, respectivamente, como as amplitudes de probabilidade de se encontrar a partícula descrita pelo estado quântico $|\psi\rangle$ nos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Vemos que $|\psi\rangle$ pode ser representado pelo ponto $\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ sobre a esfera de Riemann, e esse ponto corresponde à interseção do eixo positivo do spin com a esfera, tomada a partir do centro.

¹³ Isso significa dizer que existe um sesqui-isomorfismo entre espaços vetoriais $\varrho: \mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{G}^{A'}$ satisfazendo as relações

$$\begin{aligned} \varrho(k^A + \omega^A) &= \varrho(k^A) + \varrho(\omega^A), \\ \varrho(\lambda k^A) &= \bar{\lambda} \varrho(k^A), \quad \forall k^A, \omega^A \in \mathbb{G}^A, \quad \lambda \in \mathbb{C} \ (\bar{\lambda} \text{ é o } \mathbb{C}\text{-conjugado de } \lambda). \end{aligned}$$

Ao invés da notação $\varrho(k^A)$, denotaremos essa operação por $\overline{k^A}$, por estar de acordo com a notação do formalismo de Penrose.

3 A geometria das operações spinoriais

Para apresentarmos uma formulação como a de Penrose [2], necessitamos primeiramente introduzir o conceito de *índice abstrato*. Segundo a notação que segue desse formalismo, k^A **não** denota as componentes do vetor k , mas um elemento de um espaço vetorial (ou módulo) V^A .

Considerando o conjunto infinito de índices abstratos $\mathfrak{A} = \{A, B, C, D, \dots, A_1, B_1, C_1, D_1, \dots\}$, os elementos dos vários conjuntos $V^A, V^B, V^C, V^D, \dots, V^{A_1}, V^{B_1}, V^{C_1}, V^{D_1}, \dots$ são simplesmente elementos de $V \times \mathfrak{A}$, onde, por exemplo, $V^A = (V, A)$, ou seja, k^A é um par (k, A) , com $k \in V$ e $A \in \mathfrak{A}$. Cada índice abstrato é portanto responsável por armazenar o elemento k no “compartimento” A . Conseqüentemente, segundo essa notação, podemos escrever o produto tensorial de dois elementos k^A e η^B como $k^A \eta^B$ e temos a relação $k^A \eta^B = \eta^B k^A$. A não-comutatividade do produto tensorial se manifesta nessa notação como $k^A \eta^B \neq \eta^A k^B$.

Definimos o *espaço-spin* \mathbb{G}^A com três operações básicas:

- *multiplicação por escalar*: $\mathbb{C} \times \mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{G}^A$ ($\lambda \in \mathbb{C}, k^A \in \mathbb{G}^A \mapsto \lambda k^A \in \mathbb{G}^A$),
- *adição*: $\mathbb{G}^A \times \mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{G}^A$ ($k^A, \omega^A \in \mathbb{G}^A \mapsto k^A + \omega^A \in \mathbb{G}^A$),
- *produto escalar*: $\mathbb{G}^A \times \mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{C}$ ($k^A, \omega^A \in \mathbb{G}^A \mapsto \{k^A, \omega^A\} \in \mathbb{C}$).

Naturalmente definimos o *espaço-spin dual* \mathbb{G}_A de maneira análoga, $\mathbb{G}_A \ni \pi_A: \mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{C}$. Dessa maneira,

$$k_A \omega^A \equiv \{k^A, \omega^A\} \in \mathbb{C}. \quad (23)$$

Com relação aos vetores nulos do espaço-tempo de Minkowski, Penrose propõe que a álgebra dos vetores nulos deve estar contida na álgebra dos spinors. Para tanto definimos o espaço-spin $\mathbb{G}^{A'}$, que diremos ser o *espaço sesquidual*¹³ caracterizado pela \mathbb{C} -conjugação seguida pela transposição, onde usaremos a notação

$$\overline{k^A} \equiv \bar{k}^{A'} \in \mathbb{G}^{A'}. \quad (24)$$

A base-spin

Com um produto escalar (bilinear, antissimétrico) obtemos a representação de um vetor-spin em termos das suas componentes. Escolhemos um par de vetores-spin o^A e ι^A que satisfaçam à normalização:

$$\{o^A, \iota^A\} = o_A \iota^A = 1 = -\iota_A o^A = -\{\iota^A, o^A\}. \quad (25)$$

Pela antissimetria do produto escalar, notamos que $o_A o^A = \iota_A \iota^A = 0$. Chamamos o par (o^A, ι^A) , com a condição dada pela eq. (25), de *base-spin*. As componentes de k nessa base-spin são dadas por

$$k^0 = \{k^A, \iota^A\}, \quad k^1 = -\{k^A, o^A\}, \quad (26)$$

de modo que $k^A = k^0 o^A + k^1 \iota^A$.

Definimos também um elemento antissimétrico

$$\mathbb{G}_{AB} \ni \epsilon_{AB} : \mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{G}_B \\ k^A \mapsto k_B = k^A \epsilon_{AB}, \quad (27)$$

responsável por levantar e abaixar índices abstratos, tal que

$$\{k^A, \omega^A\} = \epsilon_{AB} k^A \omega^B = k^0 \omega^1 - k^1 \omega^0 = -\{\omega^A, k^A\}. \quad (28)$$

Podemos escrever

$$\epsilon_{AB} = o_A \iota_B - \iota_A o_B. \quad (29)$$

De fato, para qualquer base-spin que satisfaz a eq. (25), temos

$$k^A = k^0 o^A + k^1 \iota^A = (o^A \iota^B - \iota^A o^B)(k^0 o_B + k^1 \iota_B) \\ = \epsilon^{AB} k_B. \quad (30)$$

Neste ponto vemos uma das utilidades da notação de índice abstrato, pois \mathbb{G}_{AB} denota o produto tensorial $\mathbb{G}_A \otimes \mathbb{G}_B$. Definimos ainda o tensor dual $\mathbb{G}^{AB} \ni \epsilon^{AB} : \mathbb{G}_B \rightarrow \mathbb{G}^A$, que claramente satisfaz $\epsilon_{AB} \epsilon^{CB} = \delta_A^C$. Temos ainda

$$\{\kappa, \omega\} = k_B \omega^B = k_0 \omega^0 + k_1 \omega^1 = k^0 \omega^1 - \omega^0 k^1 \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_0 = -k^1 \\ k_1 = k^0 \end{array} \right\}. \quad (31)$$

A relação acima encontrada entre as componentes covariantes e contravariantes é uma consequência imediata da expressão $k_B \omega^B = k_0 \omega^0 + k_1 \omega^1$, que é ela própria uma definição.

Lema ► Dados dois spinores $k_A, \omega_A \in \mathbb{G}_A$ arbitrários tais que $k_A \omega^A = 1$, podemos escrever

$$\epsilon_{AB} = k_A \omega_B - \omega_A k_B \quad \blacktriangleleft \quad (32)$$

4 A métrica e os vetores nulos do espaço-tempo a partir de spinors

Estamos interessados em descrever vetores de \mathbb{M} sob o ponto de vista spinorial, via vetores-spin. Daqui em diante faremos uso dos índices latinos com o intuito de rotular elementos x^a de um espaço vetorial real. Com isso estabelecemos a equivalência de notação $\{a, b, \dots\} = \{A A', B B', \dots\}$. Definimos a *tétrade nula* $(l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$

$$l^a = o^A o^{A'}, \quad n^a = \iota^A \iota^{A'}, \\ m^a = o^A \iota^{A'}, \quad \bar{m}^a = \iota^A o^{A'} \quad (33)$$

e a métrica

$$g_{ab} = \epsilon_{AB} \epsilon_{A' B'} \quad (34)$$

verificando que os vetores da tétrade nula são vetores *nulos* com respeito a g_{ab} :

$$g_{ab} l^a l^b = l^a l_a = 0, \quad (35)$$

e do mesmo modo,

$$n^a n_a = m^a m_a = \bar{m}^a \bar{m}_a = 0. \quad (36)$$

Além disso podemos demonstrar que

$$l^a n_a = 1, \quad m^a \bar{m}_a = -1, \quad (37)$$

$$l^a m_a = l^a \bar{m}_a = n^a m_a = n^a \bar{m}_a = 0$$

e que

$$g_a^b \equiv g_{ac} g^{cb} = n_a l^b + l_a n^b - \bar{m}_a m^b - m_a \bar{m}^b. \quad (38)$$

É conveniente definirmos uma outra tétrade (t^a, x^a, y^a, z^a) como sendo

$$t^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(l^a + n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A o^{A'} + \iota^A \iota^{A'}), \\ x^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(m^a + \bar{m}^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A \iota^{A'} + \iota^A o^{A'}), \\ y^a = \frac{i}{\sqrt{2}}(m^a - \bar{m}^a) = \frac{i}{\sqrt{2}}(o^A \iota^{A'} - \iota^A o^{A'}), \\ z^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(l^a - n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A o^{A'} - \iota^A \iota^{A'}). \quad (39)$$

Das relações (37), temos

$$\begin{aligned} t^a x_a &= t^a y_a = t^a z_a = x^a y_a = y^a z_a = z^a x_a = 0, \\ t^a t_a &= 1, \\ x^a x_a &= y^a y_a = z^a z_a = -1. \end{aligned} \quad (40)$$

Com isso a métrica g_a^b em (38) tem a seguinte expressão:

$$\boxed{g_a^b = t_a t^b - x_a x^b - y_a y^b - z_a z^b} \quad (41)$$

Essa última relação identifica a tétrede (t^a, x^a, y^a, z^a) com a tétrede de Minkowski. Com seu uso, escrevemos

$$K^a = K^0 t^a + K^1 x^a + K^2 y^a + K^3 z^a. \quad (42)$$

Considerando a base-spin $\{o^A, \iota^A\}$, escrevemos K^a em termos dessa base

$$K^a = K^{00'} l^a + K^{01'} m^a + K^{10'} \bar{m}^a + K^{11'} n^a. \quad (43)$$

Comparando as duas últimas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} K^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} K^0 + K^3 & K^1 + iK^2 \\ K^1 - iK^2 & K^0 - K^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K^{00'} & K^{01'} \\ K^{10'} & K^{11'} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (44)$$

O vetor K^a pode então ser escrito como

$$K^a = \pm k^A \bar{k}^{A'}, \quad (45)$$

onde o sinal define um vetor nulo que aponta para o futuro (+) ou para o passado (-). K^a é obviamente real e nulo, pois $K^a K_a = |k_A k^{A'}|^2 = 0$. Ao fazermos $\xi = k^0, \eta = k^1$, encontramos:

$$K^{00'} = \xi \bar{\xi}, \quad K^{01'} = \xi \bar{\eta}, \quad K^{10'} = \eta \bar{\xi}, \quad K^{11'} = \eta \bar{\eta}. \quad (46)$$

Portanto a eq. (44) se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T + Z & X + iY \\ X - iY & T - Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi \bar{\xi} & \xi \bar{\eta} \\ \eta \bar{\xi} & \eta \bar{\eta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (47)$$

onde pusemos $T = K^0, X = K^1, Y = K^2, Z = K^3$. Essa última é a própria relação (13). Conciliamos dessa maneira os spinors aos vetores nulos do espaço-tempo, escrevendo estes em termos daqueles.

¹⁴A partir de agora denominaremos-los simplesmente 2-spinors, ou spinors.

¹⁵Um homomorfismo $f : G \rightarrow H$ de grupos é definido pelas seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} f(g)f(g') &= f(gg'), \quad \forall g, g' \in G, \\ f(id_G) &= id_H. \end{aligned}$$

5 Spinors de Weyl

Uma vez desenvolvida a teoria dos vetores-spin¹⁴, torna-se necessário estudar tais entidades sob o ponto de vista da teoria de representação do grupo de Lorentz, ou melhor, do $SL(2, \mathbb{C})$, recobrimento duplo do grupo de Lorentz restrito $SO_+(1,3)$.

5.1 Representações

Dados dois grupos G e H , dizemos que uma *representação* é uma aplicação $f : G \rightarrow H$ que é um homomorfismo¹⁵ de grupos, e H é um grupo de matrizes, de ordem n . Se V^n é um espaço vetorial n -dimensional, então dada uma base de V^n , elementos de H são transformações lineares que agem sobre V^n . O espaço vetorial V^n é dito um *espaço de representação* de G e elementos de V^n são ditos *elementos que carregam a representação de G* .

Dizemos que duas representações $\phi : G \rightarrow H$ e $\varphi : G \rightarrow H$ são *equivalentes* se existir um isomorfismo $\Phi : V^n \rightarrow V^n$ tal que $\varphi(g) = \Phi \circ \phi(g) \circ \Phi^{-1}, \forall g \in G$. Em se tratando do espaço-spin, as transformações lineares com determinante unitário formam o grupo $SL(2, \mathbb{C}) \ni \mathbf{A}$. Existem duas representações de $SL(2, \mathbb{C})$ que não são equivalentes. Definimos $\rho(\mathbf{A})(z) = \mathbf{A}z$ e $\bar{\rho}(\mathbf{A})(z) = \mathbf{A}^\dagger z$. Essas duas representações seriam equivalentes se existisse um isomorfismo $\alpha : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $\bar{\rho}(\mathbf{A}) = \alpha \circ \rho(\mathbf{A}) \circ \alpha^{-1}$. Para isso seria preciso que existisse uma matriz complexa T de ordem 2 e inversível tal que $\bar{\rho}(\mathbf{A})T = T\rho(\mathbf{A})$. Mas essa última equação não tem solução para $\mathbf{A} \in SL(2, \mathbb{C})$, embora a tenha para $\mathbf{A} \in SU(2)$. Dessa maneira temos duas representações não-equivalentes de $SL(2, \mathbb{C})$ denotadas por $D^{(1/2,0)}$ e $D^{(0,1/2)}$. Os elementos do espaço que carrega essas representações são chamados *spinors de Weyl*.

Spinors contravariantes apontuados (SCTA)

Tais spinores são elementos de um espaço bidimensional complexo, munido de uma métrica spinorial

$$\begin{aligned} G : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\zeta, \chi) &\mapsto G(\zeta, \chi) = \zeta^\dagger \mathbf{J} \chi, \end{aligned} \quad (48)$$

onde $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz simplética.

O spinor ζ é representado pelo vetor coluna

$$\boxed{\zeta = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}}. \quad (49)$$

Esse tipo de spinor carrega a representação $D^{(1/2,0)}$ do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e se transforma perante $R \in SL(2, \mathbb{C})$ como $\zeta \mapsto R\zeta$.

Spinors covariantes apontuados (SCA)

Tais spinores são elementos do espaço bidimensional complexo dual \mathbb{C}_b^2 , definido por

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_b^2 \ni \zeta_b : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \chi &\mapsto \zeta_b(\chi) = \zeta_b \chi \\ &= G(\zeta, \chi) = \zeta^\dagger \mathbf{J} \chi. \end{aligned} \quad (50)$$

Portanto o spinor ζ_b é representado por

$$\zeta_b = (\zeta_1, \zeta_2) = (\zeta^2, -\zeta^1). \quad (51)$$

A fim de que a métrica spinorial fique invariante sob a ação da transformação $R \in SL(2, \mathbb{C})$, é necessário que $\zeta_b \mapsto \zeta_b R^{-1}$, $R \in SL(2, \mathbb{C})$.

Esses dois tipos de spinors representam elementos de \mathbb{G}^A e \mathbb{G}_A , respectivamente.

Spinors contravariantes pontuados (SCTP)

Tais spinors são elementos do espaço bidimensional complexo $(\dot{\mathbb{C}}^2) \ni \dot{\zeta}$, $\zeta \in \mathbb{C}^2$ munido com a métrica spinorial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{C}}^2 \ni \dot{\zeta} : \dot{\mathbb{C}}^2 \times \dot{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\dot{\zeta}, \dot{\chi}) &\mapsto \dot{G}(\dot{\zeta}, \dot{\chi}) = \dot{\zeta} \mathbf{J} \dot{\chi}^\dagger. \end{aligned} \quad (52)$$

Os SCTP são representados por

$$\dot{\zeta} = (\bar{\zeta}^{1'}, \bar{\zeta}^{2'}). \quad (53)$$

Spinors covariantes pontuados (SCP)

Tais spinores são elementos do espaço bidimensional complexo dual $\dot{\mathbb{C}}_b^2$, definido por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{C}}_b^2 \ni \dot{\chi}_b : \dot{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \dot{\zeta} &\mapsto \dot{\zeta}(\dot{\chi}_b) = \dot{\zeta} \dot{\chi}_b \\ &= \dot{G}(\dot{\zeta}, \dot{\chi}) = \dot{\zeta} \mathbf{J} \dot{\chi}_b. \end{aligned} \quad (54)$$

e um SCP é representado por

$$\dot{\chi}_b = \begin{pmatrix} \bar{\chi}_{1'} \\ \bar{\chi}_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\chi}^{2'} \\ -\bar{\chi}^{1'} \end{pmatrix} \quad (55)$$

Claramente a lei de transformação dos spinors pontuados sob a ação de $R \in SL(2, \mathbb{C})$ é

$$\dot{\zeta} \mapsto \dot{\zeta} R^\dagger; \quad \dot{\chi}_b \mapsto (R^\dagger)^{-1} \dot{\chi}_b. \quad (56)$$

Esse tipo de spinor carrega a representação $D^{(0,1/2)}$ do grupo $SL(2, \mathbb{C})$. Os spinors pontuados representam, respectivamente, elementos de $\mathbb{G}^{A'}$ e $\mathbb{G}_{A'}$.

6 Spinors de Dirac

A partir dos 2-spinors, definimos os 4-spinors de Dirac (também chamados *bispinors* ou simplesmente *spinors de Dirac*) como elementos de $\mathbb{G}^A \oplus \mathbb{G}_{A'}$. Os spinors de Dirac classicamente são vistos como vetores do espaço quadridimensional complexo \mathbb{C}^4 equipado com a métrica spinorial

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\psi_1, \psi_2) &\mapsto \mathcal{G}(\psi_1, \psi_2) = \psi_1^\dagger (\mathbf{J}_d) \psi_2, \end{aligned} \quad (57)$$

onde o spinor ψ é definido como

$$\mathbb{C}^2 \oplus (\dot{\mathbb{C}}^2)_b \ni \psi = \zeta + \dot{\chi}_b = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \bar{\chi}_{1'} \\ \bar{\chi}_{2'} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Na base canônica de \mathbb{C}^4 a matriz \mathbf{J}_d é a representação de \mathcal{G}

$$\mathbf{J}_d = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & 0 \\ 0 & \mathbf{J} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Os spinors de Dirac carregam a representação $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ do grupo $SL(2, \mathbb{C})$. Sob a condição

$$\mathcal{G}(\psi_1, \psi_2) = \mathcal{G}(\rho(R)\psi_1, \rho(R)\psi_2), \quad (60)$$

que requer que a métrica spinorial \mathcal{G} seja invariante perante a ação da representação de R , obtemos a importante relação:

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & (R^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}, \quad R \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (61)$$

7 Bandeiras Nulas

Nesta última seção mostraremos como o spinor, até agora visto como uma entidade que carrega a representação de grupos clássicos está diretamente relacionado com uma estrutura geométrica, a bandeira nula. Tal estrutura consiste de um vetor que está na casca do cone de luz e uma família de vetores linearmente independentes a esse vetor, que é responsável pela orientação da bandeira mediante algum tipo de rotação em \mathbb{M} . Assim bandeiras são fundamentalmente fragmentos de plano orientados, tangentes à casca do cone de luz. Qualquer transformação efetuada no espaço dos spinors é também descrita em \mathbb{M} pelas bandeiras nulas. Esse é um conceito importantíssimo na teoria de Penrose e, mesmo de uma maneira sucinta tentaremos descrever as bandeiras nulas o mais completamente possível.

Vimos como associar um vetor nulo que aponta para o futuro K^a ao spinor k^A , que tem coordenadas (ξ, η) . Pela eq. (46), (ξ, η) servem também como coordenadas para K^a , e as transformações $\xi \mapsto \xi e^{i\theta}$, $\eta \mapsto \eta e^{i\theta}$ deixam K^a invariante. É proposta uma estrutura mais rica com o intuito de reduzir essa redundância a uma simples ambigüidade no sinal. Tal estrutura é composta pelo vetor nulo K^a , chamado *pólo*, e por um semiplano nulo¹⁶ (*flagplane*) e é chamada de bandeira (*flagpole*). Dessa maneira podemos passar de um spinor k^A , representado como um SCTA por duas componentes k^1 e k^2 a um objeto geométrico, a bandeira.

Vimos que podemos definir um vetor nulo que aponta para o futuro (ou pólo) pela eq. (45):

$$\begin{aligned} x^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} X^{AA'} = k^A \bar{k}^{A'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T + Z & X + iY \\ X - iY & T - Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k^1 \bar{k}^{1'} & k^1 \bar{k}^{2'} \\ k^2 \bar{k}^{1'} & k^2 \bar{k}^{2'} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (62)$$

O vetor x^a é dilatado por ρ^2 ao multiplicarmos k^A por $\lambda = \rho e^{i\theta}$. Contudo o vetor x^a não muda de direção e é independente da escolha do ângulo θ . Daí dizemos que o vetor nulo x^a é unicamente determinado pelo spinor k^A . Mas o spinor k^A não é unicamente determinado pelo vetor x^a , que corresponde a uma família de spinors. Eles formam um espaço projetivo e diferem um do outro por um fator de fase $e^{i\theta}$.

Definimos um bivector real antissimétrico, denominado *momento angular*

¹⁶Um semiplano nulo é um semiplano tangente ao cone de luz, ou seja, é um semiplano tangente ao cone, cuja intersecção com o próprio cone é o vetor K^a .

$$F^{ab} = F^{ABA'B'} = k^A k^B \epsilon^{A'B'} + \epsilon^{AB} \bar{k}^{A'} \bar{k}^{B'} \quad (63)$$

Vemos que $F^{ab} = -F^{ba}$ (e conseqüentemente que F^{ab} tem seis componentes). O bivector F^{ab} é real e determina um semiplano tangente ao cone de luz ao longo do vetor $x^a = k^A \bar{k}^{A'}$.

Tomamos uma base-spin como sendo $\{k^A, \omega^A\}$, com $k_A \omega^A = 1$. Portanto podemos escrever $\epsilon^{AB} = k^A \omega^B - \omega^A k^B$, e torna-se simples caracterizarmos a quantidade F^{ab} como sendo o momento angular, pois

$$\begin{aligned} F^{ab} &= F^{ABA'B'} \\ &= k^A k^B (\bar{k}^{A'} \bar{\omega}^{B'} - \bar{\omega}^{A'} \bar{k}^{B'}) + \\ &\quad + (k^A \omega^B - \omega^A k^B) \bar{k}^{A'} \bar{k}^{B'} \\ &= k^A \bar{k}^{A'} (k^B \bar{\omega}^{B'} + \omega^B \bar{k}^{B'}) + \\ &\quad - (k^A \bar{\omega}^{A'} + \omega^A \bar{k}^{A'}) k^B \bar{k}^{B'} \\ &= X^{AA'} Y^{BB'} - Y^{AA'} X^{BB'} \\ &= x^a y^b - y^a x^b. \end{aligned} \quad (64)$$

O spinor F^{ab} representa um bivector formado por dois vetores $x^a, y^a \in \mathbb{R}^{1,3} \simeq \mathbb{M}$. Obviamente o pólo x^a é o próprio vetor real nulo da bandeira, determinado unicamente pelo spinor k^A . O segundo vetor,

$$y^a = Y^{AA'} = (k^A \bar{\omega}^{A'} + \omega^A \bar{k}^{A'}), \quad (65)$$

é também determinado por k^A , mas não unicamente, já que o par (k^A, ω^A) não é o único possível na construção de ϵ^{AB} . Com efeito, qualquer spinor do tipo $\omega_0^A = \omega^A + \lambda k^A$ satisfaz $k_A \omega_0^A = 1$. Com essa liberdade o vetor y^a se transforma em $y_0^a = y^a + (\lambda + \bar{\lambda}) x^a$. Relacionamos cada valor real de $(\lambda + \bar{\lambda})$ a uma família de vetores y_0^a , todos eles coplanares. Esta é a bandeira, segundo Penrose.

Ao multiplicarmos o spinor k^A por $e^{i\theta}$, o vetor y^a roda em torno do pólo por um ângulo de 2θ :

$$\begin{aligned} y_{rot}^a &= Y_{rot}^{AA'} = e^{2i\theta} k^A \bar{\omega}^{A'} + e^{-2i\theta} \omega^A \bar{k}^{A'} \\ &= \cos 2\theta (k^A \bar{\omega}^{A'} + \omega^A \bar{k}^{A'}) \\ &\quad + \sin 2\theta (i k^A \bar{\omega}^{A'} - i \omega^A \bar{k}^{A'}) \\ &= y^a \cos 2\theta + z^a \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (66)$$

8 Conclusões

Gostaria de enfatizar que a primeira parte deste artigo é uma revisão base da teoria de Penrose [3]. Segundo tal teoria, a estrutura spinorial, advinda da análise da estrutura do cone de luz no espaço-tempo de Minkowski (\mathbb{M}), pode ser vista como mais fundamental que os pontos em \mathbb{M} . Quando fazemos a intersecção do cone de luz com um hiperplano de tempo constante, obtemos uma esfera de Riemann imersa em um espaço euclidiano. A partir da correspondência entre essa esfera e o plano bidimensional (acrescido de um ponto) vimos como construir vetores bidimensionais complexos, os quais, se se transformarem sob a ação do grupo $SL(2, \mathbb{C})$, denominamos spinors. Também utilizando os spinors, construímos os vetores e a métrica de \mathbb{M} .

Vimos também que rotações no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 podem ser viabilizadas a partir de transformações spinoriais. Discutimos um pouco sobre as representações de $SL(2, \mathbb{C})$, em particular sobre as suas duas representações não-equivalentes $D^{(1/2,0)}$ e $D^{(0,1/2)}$, fundamentais para a descrição dos spinors de Weyl e de Pauli na mecânica quântica não-relativística. A partir dos spinors de Weyl, consideramos os spinors de Dirac como entidades que carregam a representação $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ do grupo $SL(2, \mathbb{C})$. Descrevemos ainda algumas interpretações geométricas associa-

das aos spinors. Caracterizamos uma grandeza fundamentalmente spinorial F^{ab} como sendo o bivector momento angular, e a partir daí descrevemos a bandeira de Penrose, que pode ser interpretada como um fragmento de plano orientado. As aplicações desses conceitos são feitas na teoria dos twistors de Penrose [5], que é uma generalização dos spinors e está fora do escopo do presente artigo.

Referências

- [1] E. Cartan, *The Theory of Spinors*, Dover, Paris, 1966.
- [2] R. Abraham e J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamim, 1967.
- [3] R. Penrose e W. Rindler, *Spinors and spacetime, vol.1: Two-spinor Calculus and Relativistic Fields*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [4] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1981.
- [5] R. Penrose e W. Rindler, *Spinors and spacetime, vol.2: Spinors and Twistors Methods in Spacetime Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.