

Feixes Ópticos Não Difrativos

Wictor C. Magno

*Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, 13083-970, Campinas, São Paulo, Brasil
e-mail: wictor@ifc.unicamp.br*

Resumo

Neste trabalho, analisamos algumas soluções não lineares paraxiais para a equação de onda de Helmholtz, notadamente um feixe de Bessel livre de difração. Apresentamos algumas comparações entre os feixes besseliano e gaussiano e citamos algumas possíveis aplicações dos feixes não difrativos que os tornam interessantes para a óptica não linear.

In this work, we analyzed some nonlinear paraxial solutions for the Helmholtz wave equation, notably a diffraction-free Bessel beam. We presented some comparisons between the Bessel and Gaussian beams and some possible applications of diffractionless beams are mentioned, that turn them interesting for the nonlinear optic.

1 Introdução

O perfil espacial de um feixe de radiação eletromagnética constitui um parâmetro importante para aplicações científicas e tecnológicas. Numa primeira abordagem, as frentes de onda mais simples que propagam-se em um meio material são as ondas planas, para as quais a fase mantém-se constante sobre planos espaciais. Em geral, nos cursos de física básica, bem como nos cursos normais de eletromagnetismo do ciclo profissional, a forma espacial da radiação eletromagnética não é considerada explicitamente, sendo quase sempre dada em termos de ondas planas, o que é bastante compreensível, pois simplifica os cálculos para os alunos iniciantes; além do que, as ondas planas formam uma base matemática através da qual os campos eletromagnéticos mais realísticos podem ser expandidos. Supondo dependência harmônica para a radiação, a equação de onda que descreve a propagação pode ser escrita na forma da equação de Helmholtz para o campo elétrico

$$\nabla^2 E(r, t) + k^2 E(r, t) = 0, \quad (1)$$

onde k é o vetor de onda da radiação, o qual está relacionado à frequência ω da onda, a permissividade ϵ e a permeabilidade μ do material no qual ocorre a propagação, pela relação de dispersão [1]:

$$k = \omega \cdot \sqrt{\mu\epsilon}. \quad (2)$$

Podemos procurar soluções para a Eq. (1) do tipo paraxial, onde a direção de propagação do campo elétrico seja em uma dada direção longitudinal z . Em coordenadas cilíndricas e tendo o problema de simetria azimutal, podemos decompor o operador diferencial Laplaciano (∇^2) em

duas componentes: a transversal (direção r) e a longitudinal (direção z)

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3)$$

Supondo que a propagação seja próxima do tipo onda plana, onde o fluxo de energia está predominantemente ao longo da direção longitudinal, podemos escrever, de forma geral, que o campo elétrico é dado por uma única componente transversal:

$$E(r, t) = \Psi(r) \cdot \exp[i(\omega t - kz)]. \quad (4)$$

Existirão inúmeros tipos de amplitudes $\Psi(r)$ para o campo elétrico satisfazendo à equação de Helmholtz, cada solução apresentando suas características próprias. Alguns tipos de amplitudes estarão sujeitas ao fenômeno da difração, efeito que afeta a quase todos os campos ondulatórios clássicos. Neste trabalho analisamos duas possibilidades para a amplitude $\Psi(r)$ do campo: perfil gaussiano fundamental e perfil besseliano. No segundo caso, como veremos mais adiante, temos uma solução do tipo livre de difração [2].

O objetivo deste trabalho é apresentar uma revisão dos principais aspectos envolvidos na teoria eletromagnética de feixes ópticos não difrativos. Os tópicos deste trabalho foram divididos da seguinte maneira: na seção 2 são apresentadas duas soluções paraxiais da equação de onda. Discutimos na seção 3 a realização experimental do feixe de Bessel, e comparamos os perfis gaussiano e besselianos fundamentais. Algumas possíveis aplicações dos feixes sem difração são dadas na seção 4, e finalmente apresentamos uma breve conclusão na seção 5.

2 Algumas soluções paraxiais da equação de onda

Uma das soluções mais importantes da equação de onda é uma função do tipo gaussiana, uma vez que representa grande parte da forma espacial dos feixes de lasers presentes nos laboratórios de óptica. Esta solução é imposta pelas condições de contorno das cavidades ressonantes que formam os lasers, sendo em alguns casos, entretanto, gerados perfis mistos do tipo Gauss-Laguerre. O modo gaussiano fundamental é caracterizado pela seguinte expressão para a amplitude do campo elétrico [1]:

$$E(r) = E_o \cdot \frac{w_o}{w(z)} \cdot \exp \left\{ i[\phi(z) - kz] - r^2 \cdot \left[\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right] \right\}, \quad (5)$$

onde w_o é a cintura mínima do feixe definida no plano $z = 0$, e $w(z)$ representa a cintura do feixe na posição longitudinal z , sendo dada pela seguinte expressão:

$$w(z) = w_o \sqrt{1 + (z/z_o)^2}, \quad (6)$$

de tal maneira que $w(z_o) = \sqrt{2}w_o$, onde $z_o = (\pi w_o^2 n / \lambda)$ é o comprimento de Rayleigh da radiação com comprimento de onda λ . A fase adquirida pelo campo após propagar uma distância longitudinal z , em um meio material de índice de refração n , é a quantidade $\phi(z) = \tan^{-1}(z/z_o)$, enquanto $R(z)$ representa o raio de curvatura da frente de onda do feixe nessa posição. A forma do feixe gaussiano fundamental é então univocamente determinada, dada sua cintura mínima w_o e sua localização (plano $z = 0$).

Da equação (6), vemos que a cintura do feixe gaussiano cresce com a distância longitudinal, apresentando, portanto, uma divergência angular dada pelo ângulo de difração θ_{dif} :

$$\theta_{dif} = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{\pi w_o n}\right) \approx \left(\frac{\lambda}{\pi w_o n}\right) = \frac{w_o}{z_o}, \quad (7)$$

conforme se pode ver na Fig. 1. Esta divergência angular é uma manifestação da difração ondulatória, ocasionada pelo espalhamento de uma onda confinada em uma direção transversal, por uma abertura de raio w_o , para campos longos ($z \gg z_o$). Esse efeito, inerente aos feixes gaussianos, pode ser em parte diminuído ou até mesmo aumentado, usando-se um telescópio óptico, formado por um par de lentes convergentes (uma objetiva e uma ocular) cujo afastamento entre elas é dado pela soma de suas distâncias focais [3].

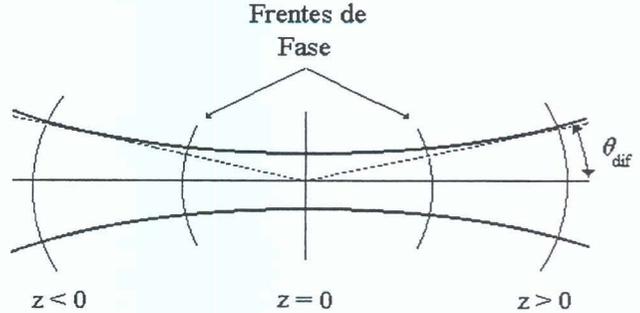


Figura 1: Aspecto da propagação de um campo gaussiano, mostrando a divergência angular do feixe.

Há alguns anos foram previstas soluções teóricas paraxiais da equação de onda do tipo modos besselianos, feitas por J. Durnin e colaboradores [2]. Uma característica fundamental destas soluções é que estes modos representam ondas perfeitamente livres de difração, com um máximo central de intensidade muito estreito. O termo *livre de difração* significa que o campo elétrico obedece a seguinte expressão:

$$E(r, z, t) = E_o \cdot J_0(\alpha r) \cdot \exp(i[\beta z - \omega t]), \quad (8)$$

onde α e β são as componentes radial e longitudinal do vetor de onda, respectivamente, satisfazendo a relação: $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$; enquanto J_0 é a função de Bessel de ordem zero e primeira espécie. Quando $0 < \alpha < k$, a solução (8) representa um feixe sem difração, uma vez que apresenta o mesmo perfil espacial de intensidade, $J_0^2(\alpha r)$, para todo plano normal ao eixo z . Na Fig. 2.a mostramos a solução besseliana para o campo elétrico, enquanto na Fig. 2.b apresentamos o perfil de intensidade do tipo Bessel fundamental na origem ($z = 0, t = 0$). A largura do pico central é aproximadamente α^{-1} .

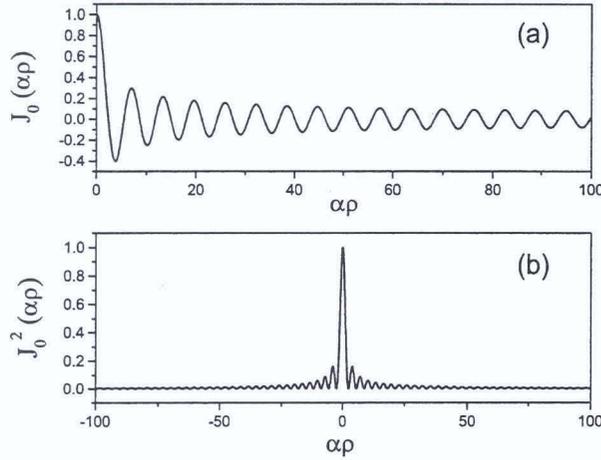


Figura 2: (a) Solução do tipo campo besseliano para $z = 0$ e $t = 0$. (b) Perfil de intensidade besseliano fundamental.

3 Como produzir um feixe de Bessel

Nesta seção discutimos a realização experimental de um feixe besseliano [2]. Incide-se um feixe de luz colimado de um laser He-Ne ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$) em uma abertura tipo fenda circular, de diâmetro médio $d = 2.5 \text{ mm}$, e com uma largura $\Delta d = 10 \text{ }\mu\text{m}$. Na Fig. 3 vemos a seção transversal do arranjo experimental utilizado na obtenção de um feixe besseliano. A fenda circular está posicionada no plano focal de uma lente de distância focal $f = 30.5 \text{ cm}$ e raio $R = 3.5 \text{ mm}$. Do princípio de Huygens, temos que cada ponto da frente de onda incidente atuará como uma fonte secundária de pequenas ondas esféricas para além da abertura, as quais serão transformadas em ondas planas pela lente. Pode-se mostrar que o conjunto de ondas planas assim formadas terão vetores de onda contidos sobre a superfície de um cone, formando uma frente de onda cônica (Fig. 4), sendo esta a característica matemática que define um feixe de Bessel. Ao atravessar a abertura circular, o feixe colimado será transformado em um feixe J_0 pela lente, sendo a largura do spot central dada por $\alpha = (2\pi/\lambda) \cdot \text{sen}(\theta)$, onde $\theta = \tan^{-1}(d/2f)$. Como é sabido, a amplitude do campo será modulada pela envoltória de difração da fenda circular. Entretanto, esta modulação será pequena se a abertura de saída (raio R da lente) for grande o suficiente, de forma que tenhamos $\Delta d \ll (\lambda f/R)$.

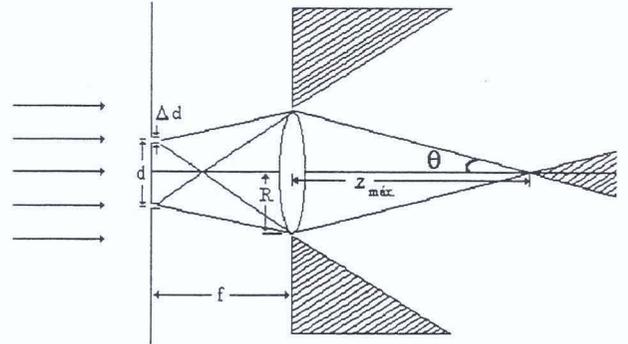


Figura 3: Arranjo experimental para criar um feixe de Bessel fundamental.

Existe, no entanto, um limite de propagação para a solução besseliana, dado pela região de sombra, a uma distância Z_{max} da lente. Da Fig. 3, temos que $Z_{max} = [R/\tan(\theta)]$. Podemos estimar geometricamente essa distância, considerando a aproximação paraxial: $\tan(\theta) \approx \text{sen}(\theta) = (\alpha/k)$, e que a cintura do feixe seja aproximadamente $w_0 = \alpha^{-1}$. Assim, temos que a máxima distância de propagação livre do feixe de Bessel será $Z_{max} \approx (2\pi R w_0/\lambda)$. O limite máximo de propagação de um feixe besseliano pode chegar a ser muito maior do que a distância típica (o comprimento de Rayleigh z_0) que um feixe colimado pode propagar, sem sofrer grande divergência espacial.

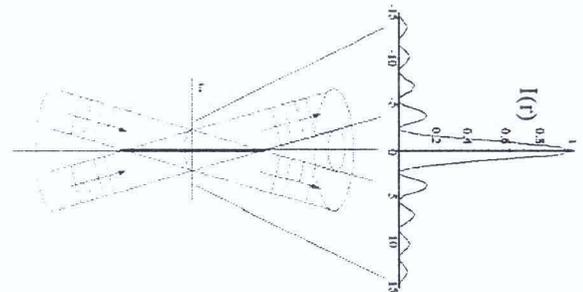


Figura 4: Frente de ondas cônicas dos feixes besselianos, cujos vetores de onda estão contidos sobre a superfície de um cone.

Na Fig. 5 vemos uma comparação experimental entre os perfis transversais dos feixes gaussiano e besseliano [2], com mesma largura plena a meia altura no plano $z = 0$: $\Delta r_{(FWHM)} = 70 \mu m$ (FWHM = full width at half maximum), para diferentes valores da distância de propagação. Na curva (a) estamos na origem $z = 0$ e o perfil gaussiano (curva pontilhada) coincide com o pico central do perfil besseliano (curva sólida). Em (b) por sua vez, $z = 10 \text{ cm}$ e a intensidade gaussiana foi multiplicada por um fator de 30 a fim de permitir visibilidade. Já em (c) temos que $z = 100 \text{ cm}$, sendo a gaussiana multiplicada por um fator de 2000 para se comparar com os casos anteriores. Vemos, então, que a intensidade do feixe de Bessel independe da distância longitudinal propagada, enquanto que a intensidade gaussiana alarga drasticamente com o aumento dessa distância.

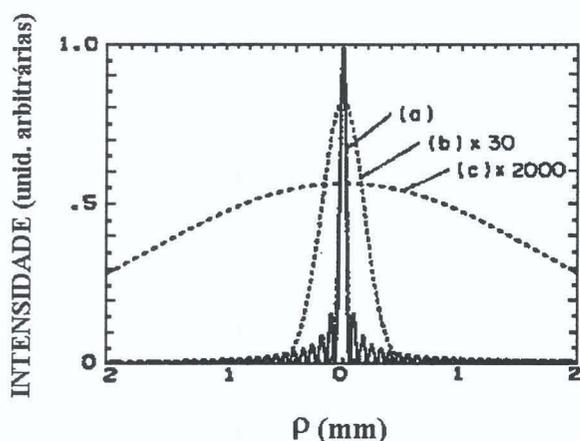


Figura 5: Comparações entre os feixes gaussiano (curva pontilhada) e besseliano (curva sólida), para diferentes distâncias propagadas. Na situação (a) temos $z = 0$, em (b) $z = 10 \text{ cm}$ e em (c) $z = 100 \text{ cm}$.

Após a proposta inicial de Durnin e colaboradores, foram realizados novos esquemas para gerar experimentalmente feixes de Bessel. Devido às dimensões reduzidas da fenda circular usada na configuração experimental original (Fig. 3), grande quantidade de luz é perdida pelo sistema, resultando em um feixe de baixa potência e não muito útil para aplicações de óptica não linear, as quais demandam altos níveis de intensidade dos lasers utilizados. O uso de elementos ópticos periódicos com simetria circular no lugar da fenda circular inicialmente proposta pode reduzir as perdas de potência presentes no *setup* original de Durnin. Esses elementos ópticos, conhecidos como máscaras de fase, são

hologramas gerados por computador [4], que introduzem modulações de amplitude e de fase na frente de onda incidente, e geram por transmissão aproximadamente um feixe de Bessel, com maior intensidade e com uma distância Z_{max} maior.

4 Algumas aplicações dos feixes não difrativos

O feixe besseliano fundamental apresenta algumas características que podem ser exploradas para uso prático [5]. As propriedades mais interessantes desses feixes são as seguintes:

- (1) A existência de uma intensa região central de intensidade, que pode ser extremamente pequena, podendo ter até mesmo a dimensão do comprimento de onda da luz usada. Isto pode ser útil na investigação da posição, tamanho ou movimento de pequenos objetos que cruzem o feixe transversalmente.
- (2) A presença de um sistema de anéis que acompanha o *spot* central do feixe. O tamanho desses anéis mantém-se constante sobre um longo alcance. Isto pode ser utilizado em aplicações que necessitem de uma grade ou de uma referência como escala para os objetos medidos.
- (3) O feixe apresenta alta direcionalidade, sendo útil então em aplicações que demandem alta precisão de mira.

Como aplicações específicas, podemos citar as seguintes utilidades para esse feixe: a detecção de grandes objetos, que ocorra ao longo do alcance do feixe, monitorando a luz transmitida; a detecção de pequenos objetos que movam-se dentro do feixe, coletando-se a luz espalhada; a medição da velocidade transversal de pequenos objetos que movem-se através dos anéis do feixe. Esses feixes também podem ser usados em fotolitografia, alinhamento de componentes ópticos e microposicionamento para armazenamento de dados ópticos. Uma aplicação bastante interessante pode ser encontrada na referência [6], onde os autores construíram uma pinça óptica para micromanipulação de pequenos objetos usando um feixe sem difração do tipo Bessel.

Outras aplicações dos feixes de Bessel são possíveis na Óptica Não Linear [7], graças a longa linha focalizada do feixe. Uma vez que o vetor de onda total da radiação obedece a relação $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, ao longo de uma estreita região espacial de alta intensidade, é possível sintonizar a velocidade de fase do campo, favorecendo então ao casamento de fase (*phase-matching*), muito importante na detecção experimental de sinais ópticos não lineares. No Brasil, as pesquisas envolvendo a produção de feixes não difrativos são realizadas

pelo grupo do professor Jandir M. Hickmann, do Laboratório de Óptica Quântica e Não Linear do Departamento de Física da Universidade Federal de Alagoas [8], [9], [10].

5 Conclusões

Como conclusão, foi discutida a existência de soluções paraxiais, livres de difração, da equação de Helmholtz. O limite máximo de propagação do feixe de Bessel pode ser muito maior do que o comprimento de Raileigh que um feixe colimado pode propagar, sem difratar. Foram apresentadas algumas realizações experimentais do feixe de Bessel, usando componentes ópticos simples. Algumas características interessantes desses feixes foram citadas, indicando-se possíveis utilizações em Óptica Não Linear.

6 Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro, e aos professores Cid B. de Araújo e J. R. Rios Leite pelas sugestões e discussões sobre este trabalho.

Referências

- [1] Amnon Yariv, *Quantum Electronics*, Wiley, New York, 3a. edição (1988).
- [2] J. Durnin, J.J. Miceli, Jr. and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1499 (1987).
- [3] Eugene Hecht, *Óptica*, Addison-Wesley, Lisboa (1991).
- [4] A. Vasara, J. Turunen and A. T. Friberg, *J. Opt. Soc. Am. A* **6**, 1748 (1989).
- [5] R. M. Herman and T. A. Wiggins, *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, No. 6, 932 (1991).
- [6] J. Arlt, V. Garces-Chavez, W. Sibbett and K. Dholakia, *Optics Communication* **197**, 239 (2001).
- [7] T. Wulle and S. Herminghaus, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1401 (1993).
- [8] S. C. Cerda, M. A. Meneses-Nava and J. M. Hickmann, *Optics Letters* **25**, 83 (2000).
- [9] S. C. Cerda, E. Tepichin, M. A. Meneses-Nava, G. Ramirez and J. M. Hickmann, *Optics Express* **3**, 524 (1998).
- [10] S. C. Cerda, M. A. Meneses-Nava and J. M. Hickmann, *Optics Letters* **23**, 1871 (1998).

