Uma Discussão sobre Quiralidade: Números Quânticos para Modelos de Oscilação Quiral *"Left-Right"* com Simetria de Gauge $SU(4)$

Alex Eduardo de Bernardini

Departamento de Raios Cósmicos, IFGW, UNICAMP,
C.P. 6165, 13083-970, Campinas, São Paulo, Brasil
E-mail: alexeb@ifi.unicamp.br

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos uma breve discussão sobre a quiralidade, um caráter quântico de importância fundamental no estudo de física de neutrinos e de física de partículas de maneira geral. Na atualidade existem diferentes interpretações para os mecanismos de oscilação de "sabores" de neutrinos que, numa conseqüência imediata, vêm indicar a existência de massa para os mesmos. Justifica-se, assim, uma oscilação do caráter quântico quiral *"left-right"* que possa ocorrer em patamares de energia bem mais elevados, se comparados à energia de unificação eletrofraca, e que desapareça com uma eventual quebra de simetria. Desta forma, o objetivo maior deste texto é o de estabelecer uma base de simetria de grupo $SU(4)$ para o estudo da oscilação quiral *"left-right"*, de maneira que sejam determinados os números quânticos correlatos às diferentes representações do grupo de simetria $SU(4)$.

1 Introdução

Atualmente, os resultados experimentais imprevistos obtidos nos estudos de neutrinos solares [1] indicam, provavelmente, diferentes interpretações para os mecanismos de oscilação de "sabor" de neutrinos[1] que, numa conseqüência imediata, vêm indicar a existência de massa para os mesmos. O valor muito pequeno dessas massas, se comparado aos valores para quarks e léptons carregados, propiciam diferentes interpretações para a natureza das mesmas [2].

Neutrinos massivos devem revelar a existência de neutrinos com quiralidade *"right-handed"* se considerarmos a natureza de Dirac [3] dessas partículas, ou então, impor a violação de número leptônico quando considerarmos a natureza de Majorana [4] das mesmas [2, 5]. Isso permite uma releitura de teorias de unificação eletrofraca e mesmo de teorias de grande unificação.

Justamente dentro deste contexto, estudamos o conceito de quiralidade e sugerimos um caminho, com base num grupo[2] de simetria $SU(4)$, através do qual a oscilação deste caráter quântico (*"left-right"*) possa ser estudada. Para tanto, neste texto, construiremos a base de representações para a determinação dos números quânticos correlatos às representações mais importantes[3] do grupo de simetria $SU(4)$.

2 Discussão sobre Quiralidade

Para o leitor que não está familiarizado com este termo, a quiralidade é uma simetria observada em um spinor ψ, identificada pela aplicação do operador γ^5 de Dirac. Esse caráter quântico permanece invariante diante de uma transformação de Lorentz contínua, enquanto que o operador helicidade $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}$, onde $\boldsymbol{\sigma}$ são as matrizes de Pauli (4×4) na forma $\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{1}$, não é invariante de Lorentz para partículas com massa.

A helicidade de uma partícula é a projeção do spin na direção do movimento. Para neutrinos livres, os spinores de Dirac são autoestados do operador helicidade independentes do fato de uma partícula (no caso o neutrino) ter ou não ter massa. O operador helicidade comuta com o hamiltoniano livre, de modo que os seus autoestados são observáveis físicos.

Os autoestados de quiralidade γ^5 são denomidados de *"left-handed"* (ψ_L ou $\overline{\psi_L}$) e *"right-handed"* (ψ_R ou $\overline{\psi_R}$)[4].

As interações fracas onde os neutrinos estão presentes podem ser sempre descritas por meio de campos quirais definidos por (1):

$$\psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi\ ,$$

[1] O modelo padrão determina e os dados experimentais confirmam a existência de três "sabores" para os neutrinos: o neutrino que acompanha o antielétron ν_e, o neutrino que acompanha o antimuon ν_μ e o neutrino que acompanha o antitauon ν_τ.

[2] Na literatura, quando se estuda uma *álgebra* dentro de um contexto físico, é muito comum o uso da metonímia pelo termo *grupo*. Todo o desenvolvimento feito neste trabalho é feito com base na álgebra de representações do grupo de simetria $SU(4)$.

[3] Nos referimos àquelas que possam ter maior utilidade na construção da teoria de interações regidas por uma simetria $SU(4)$.

[4] A partir deste ponto, a notação empregada ao longo deste texto será a seguinte: um campo $\psi_{L(R)}$ deve aniquilar partículas *"left (right)-handed"* e criar antipartículas *"right (left)-handed"*; analogamente, um campo $\overline{\psi_{L(R)}}$ deve criar partículas *"left (right)-handed"* e aniquilar antipartículas *"right (left)-handed"*. Vale lembrar que a quiralidade de um spinor é sempre oposta a da antipartícula associada: $\overline{\psi_{L(R)}} \equiv (\overline{\psi})_{R(L)}$.

$$\begin{aligned}\psi_R &= \frac{1+\gamma^5}{2}\psi \ , \\ \psi &= \psi_L + \psi_R \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Pela construção fica claro que:

$$\begin{aligned}\gamma^5\psi_L &= -\psi_L \ , \\ \gamma^5\psi_R &= +\psi_R \ , \end{aligned} \tag{2}$$

onde observamos que os campos quirais correspondem a autoestados de γ^5 quaisquer que sejam suas massas.

Para o caso de partículas sem massa, a operação de quiralidade leva aos mesmos números quânticos que a helicidade, quando atuam sobre um mesmo estado, trocando apenas os sinais (3):

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}\left(\frac{1\mp\gamma^5}{2}\right)\psi = \mp\left(\frac{1\mp\gamma^5}{2}\right)\psi \ . \tag{3}$$

O operador de quiralidade γ^5 comuta com o hamiltoniano livre somente quando este descreve partículas sem massa. Para partículas massivas, os autoestados de helicidade são observáveis físicos, enquanto que os autoestados de quiralidade não são, de modo que se a partícula se encontra em um autoestado de massa não pode ser descrita como um autoestado de quiralidade uma vez que $[\gamma^5, H] \neq 0$ para partículas massivas.

Um estado quiral sempre será uma combinação linear de dois estados de helicidades positiva e negativa: $+1$ e -1.

Se considerarmos a teoria de Glashow, Weinberg e Salam (GWS) [6, 7, 8, 9] para interações eletrofracas com o modelo de simetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, onde o índice Y se refere à hipercarga das interações eletrofracas e L se refere ao caráter quiral *"left"*, a quiralidade se mostra como um número quântico interessante para partículas sem massa. Em uma lagrangiana com um termo de massa, fica evidente a quebra de simetria quiral, já que o termo de massa (4) mostra o acoplamento de partículas de quiralidades opostas e, no caso dos neutrinos, abrem o precedente para a existência de neutrinos *"right-handed"*.

$$m(\overline{\psi_R}\psi_L + \overline{\psi_L}\psi_R) \tag{4}$$

Sabemos, porém, que as interações descritas pela simetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ levam em consideração que um neutrino *"right-handed"* é representado por um singleto do $SU(2)_L$ bem como possui hipercarga Y nula, ou seja, o neutrino *"right-handed"* não é interagente dentro da teoria GWS.

Um mecanismo de oscilação quiral pode vir a explicar a os valores imprevistos e, até mesmo, inesperados relativos aos dados sobre neutrinos solares. Os modelos sobre oscilação quiral mais tradicionais estabelecem que os neutrinos devem ter massa para que este efeito exista.

Entendemos que a idéia de oscilação de quiralidade pode caminhar paralelamente aos princípios de simetria que norteiam a construção de modelos com simetria de gauge[5].

Procuramos, então, estabelecer uma base para a construção de uma teoria de gauge com simetria $SU(4)$ onde se possa observar a presença de neutrinos *"right-handed"* interagentes mediante um acoplamento com oscilação quiral *"left-right"*[6] que, de alguma forma, possa justificar a sua inatividade na teoria GWS.

3 Modelos para Oscilação Quiral $L-R$ com Simetria de Gauge $SU(4)$.

Se conhecemos a estrutura de *raízes* e *pesos* do $SU(4)$ bem como do $SU(2)$ [13] podemos estabelecer as relações iniciais na construção de um modelo de unificação que descreva a oscilação de quiralidade $L-R$ dentro de uma simetria de gauge.

Procuramos entender as propriedades que possibilitam a construção de uma teoria de interações eletrofracas englobada por um mecanismo de oscilação de quiralidade dentro de uma simetria de gauge descrita por um acoplamento $SU(4)_{LR} \otimes U(1)_D$.

Fazendo uma curta analogia, da mesma maneira que a invariância diante da conjugação de carga é presente em uma teoria com interações regidas por uma simetria $U(1)_{EM}$ (eletromagnética) temos o objetivo final de identificar uma simetria que descreva as interações num determinado patamar de energias onde a invariância de paridade não seja violada. Dentre as possibilidades, procuramos estabelecer uma composição na forma (5)[7] em um modelo que recupere a simetria $L-R$ do caráter quiral [10, 11, 12]:

$$\begin{aligned}&SU(4)_{LR} \otimes U(1) \\ &\quad \supset \ SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-l}\end{aligned} \tag{5}$$

Segundo essa possibilidade procuramos classificar todos os léptons[8] de uma geração (férmions e antiférmions) do modelo de interações eletrofracas dentro das representações fundamental e fundamental conjugada do $SU(4)$: $\mathbf{4} \oplus \bar{\mathbf{4}}$[9].

[5] É comum a utilização do vocábulo em português traduzido como "calibre".

[6] Deste ponto em diante nos referimos ao carater quiral *left (right)-handed* (mão esquerda (direita)) simplesmente pela inicial maiúscula L (R).

[7] As transformações de simetria em $U(1)_{B-l}$ mantêm a invariância de número bariônico B menos número leptônico l: $B-l$.

[8] O modelo pode ser aplicado a multipletos de quarks bastando para isso atribuirmos um valor correto para hipercarga Y_D em um modelo com simetria $SU(4)_{LR} \otimes U(1)_D$.

[9] Outras possibilidades de representação em multipletos de dimensões maiores podem ocorrer, entretanto, não obtivemos sucesso na correlação dos mesmos com as propriedades físicas descritas pelos números quânticos.

A representação fundamental de um acoplamento das simetrias $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-l}$ pode ser descrita em (7) conforme a notação $(\mathbf{N}_L - dim, \mathbf{N}_R - dim, B - l)$:

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix} \Rightarrow \text{dubleto do } SU(2)_L \Rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -1) \ , \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_R \\ \ell_R \end{pmatrix} \Rightarrow \text{dubleto do } SU(2)_R \Rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1) \ . \quad (7)$$

Os elementos ℓ e ν se referem respectivamente aos léptons e aos neutrinos correspondentes.

Obteremos a regra de composição aplicável a três relações de contingência: (8), (9) e (10), dentre várias que podem descrever uma quebra de simetria $SU(4)_{LR}$:

$$\begin{aligned} &SU(4)_{LR} \\ &\quad \supset \quad SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-l} \ . \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &SU(4)_{LR} \otimes U(1)_D \\ &\quad \supset \quad SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-l} \ . \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &SU(4)_{LR} \otimes U(1)_D \\ &\quad \supset \quad SU(2)_L \otimes SU(2)_R \\ &\qquad \otimes U(1)_{LR} \otimes U(1)_{B-l} \ . \end{aligned} \quad (10)$$

Conforme a relação (8) a representação fundamental de $\mathbf{4} - dim$ do $SU(4)_{LR}$ poderá perfeitamente ser descrita pela soma direta da representação fundamental $\mathbf{2} - dim$ do $SU(2)_L$ com representação fundamental $\mathbf{2} - dim$ do $SU(2)_R$.

$$\mathbf{4} \equiv (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1) \ , \quad (11)$$

onde estamos utilizando a notação $(\mathbf{N}_L, \mathbf{N}_R, B - l)$ uma vez que a representação de dimensão $\mathbf{N}$ é equivalente a $\bar{\mathbf{N}}$ no $SU(2)$.

Entretanto, a existência do grupo $U(1)_{B-l}$, bem como a verificação da quebra de simetria (12) [12, 10, 11] impõe restrições físicas à composição (8):

$$\begin{aligned} &SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-l} \\ &\quad \Rightarrow \quad SU(2)_L \otimes U(1)_Y \Rightarrow U(1)_{EM} \ . \end{aligned} \quad (12)$$

Como este texto deve servir de base para a verificação de uma possível oscilação do número quântico quiralidade decorrente de uma operação de simetria dentro da álgebra de representações do grupo $SU(4)$, a composição como em (8) nos obrigaria a escrever o multipleto fundamental para uma família de férmions (ν_ℓ, ℓ) como em (13):

$$\begin{aligned} \mathbf{4} \equiv &\quad (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -1) \oplus (\mathbf{1}, \ mathbf{2}, +1) \\ \equiv &\quad \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \\ \overline{\nu_L} \\ \overline{\ell_L} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \\ (\overline{\nu})_R \\ (\overline{\ell})_R \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{4}} \equiv &\quad (\mathbf{2}, \mathbf{1}, +1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1) \\ \equiv &\quad \begin{pmatrix} \overline{\nu_R} \\ \overline{\ell_R} \\ \nu_R \\ \ell_R \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (\overline{\nu})_L \\ (\overline{\ell})_L \\ \nu_R \\ \ell_R \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (14)$$

Desta forma $\mathbf{4}$ e $\bar{\mathbf{4}}$ do $SU(4)_{LR}$ se comportam respectivamente como $\mathbf{4}_L$ do $SU(2)_L$ e $\mathbf{4}_R$ do $SU(2)_R$, ou seja, não haveria efetivamente a composição esperada de maneira a se verificar a oscilação do caráter quiral $L - R$ de um férmion (multipleto fundamental), enfim, efetivamente a oscilação de quiralidade não poderia ser estudada desta forma.

Quando colocamos em um mesmo multipleto $\mathbf{4} - dim$ partículas e antipartículas[10] não é possível estender a definição do número quântico de carga elétrica $Q(\Lambda)$ também para o multipleto de quarks, o que não é muito interessante, uma vez que quarks e léptons se comportam de maneira igual em um acoplamento eletrofraco, além disso, não se está definindo propriamente uma hipercarga que deva ser conservada em um vértice de interação e o caráter partícula-antipartícula (conjugação de carga) perde o sentido. Aparece, então, o questionamento imediato: porque não representar $\mathbf{4} - dim$ como (15)?

$$\mathbf{4} \equiv (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1) \ . \quad (15)$$

Neste caso, de acordo com (8) é fácil verificar que o operador de carga elétrica $Q(\Lambda)$ não pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos da subálgebra de Cartan do $SU(4)_{LR}$ (rank 3) que descrevem as simetrias (que devem ser físicas para que o modelo tenha sentido) de uma transformação de gauge no $SU(4)_{LR}$. Isso impede que $Q(\Lambda)$ atue como uma simetria associada à conservação de carga elétrica dentro da álgebra descrita por (8).

Resumindo as duas possibilidades restantes (9 e 10), teremos uma elaboração mais elegante do multipleto fundamental de férmions, ao mesmo tempo que sugerimos mais um número quântico D associado à operação de simetria em $U(1)_D$ bem como mais uma constante de acoplamento g_D.

[10] Seria também o caso de $\mathbf{4} \equiv \left(\nu_L \ \ell_L \ \overline{\nu_R} \ \overline{\ell_R}\right)^T$.

Tabela 1: Números quânticos das representações fundamental e conjugada do $SU(4)_{LR} \otimes U(1)_D$.

férmion	$([\mathbf{\Lambda}], D)_{SU(4)_{LR}\otimes U(1)_D}$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_{12}$	$Y_{SU(4)}$	Q	$\Lambda' \equiv ([\mathbf{\Lambda}_L], [\mathbf{\Lambda}_R], (B-l))$
ν_L	$([\ 1\ \ 0\ \ 0], \ d)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$([\ 1], [\ 0], [-1])$
ℓ_L	$([-1\ \ 1\ \ 0], \ d)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	$([-1], [\ 0], [-1])$
ν_R	$([\ 0\ -1\ \ 1], \ d)$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$([\ 0], [\ 1], [-1])$
ℓ_R	$([\ 0\ \ 0\ -1], \ d)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$([\ 0], [-1], [-1])$
$\overline{\nu_L}$	$([\ 0\ \ 0\ \ 1], -d)$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$([-1], [\ 0], [\ 1])$
$\overline{\ell_L}$	$([\ 0\ \ 1\ -1], -d)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$+1$	$([\ 1], [\ 0], [\ 1])$
$\overline{\nu_R}$	$([\ 1\ -1\ \ 0], -d)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$([\ 0], [-1], [\ 1])$
$\overline{\ell_R}$	$([-1\ \ 0\ \ 0], -d)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+1$	$([\ 0], [\ 1], [\ 1])$

É muito importante salientar que caso a simetria $U(1)_D$ seja determinada de maneira que $D = B - l$, estaremos desvinculando totalmente as propriedades de simetria de interação eletromagnética das mesmas propriedades relativas à oscilação de quiralidade $L - R$. Em tempo, se $D \neq B - l$, estaremos diante de um vínculo entre as simetrias quiral e de carga, de maneira que uma álgebra de *"rank"* superior ao de $SU(4)_{LR}$ possa ser vislumbrada[11]

Denominando o autovalor de $U(1)_D$ de $\pm d$ escrevemos a representação fundamental desta álgebra como em (16):

$$(\mathbf{4}, d) \equiv (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1) \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \\ \nu_R \\ \ell_R \end{pmatrix} , \qquad (16)$$

cujos números quânticos bem como os da representação conjugada são descritos na Tabela 1.

Conhecendo as raízes de Dynkin [13] podemos definir os operadores que chamaremos de A_3, A_{12} e $Y_{SU(4)}$, na base dual, de maneira que os autovalores possam ser determinados:

$$\begin{array}{lcl} \bar{A}_3 & = & \frac{1}{2}[\ 1\ \ 0\ \ 0]\ , \\ \bar{A}_{12} & = & \frac{1}{2}[\ 0\ \ 0\ \ 1]\ , \\ Y_{SU(4)} = \sqrt{2}\bar{A}_{15} & = & \frac{1}{2}[\ 1\ \ 2\ \ 1]\ . \end{array} \qquad (17)$$

Para obtermos os valores das cargas elétricas da Tabela 1 basta assumirmos que $d = -1$, que coincide exatamente com o valor de $B-l$ para os multipletos $(\mathbf{4}, -1)$ e $(\bar{\mathbf{4}}, 1)$. Vale lembrar que isto não é suficiente para generalizarmos a relação entre $U(1)_D$ e $U(1)_{B-l}$ para todos os férmions, quarks inclusive. No que concerne à teoria eletrofraca, o operador carga elétrica pode ser escrito como (18):

$$Q = A_3 + A_{12} + \frac{D}{2} \ . \qquad (18)$$

Observe que a simetria de carga independe da simetria associada a $Y_{SU(4)}$ que representa os números quânticos de quiralidade, como podemos observar pelos autovalores.

Isso só poderá ser devidamente estabelecido quando forem desenvolvidas as interações que aparecem numa lagrangiana com simetria de gauge $SU(4)_{LR} \otimes U(1)_D$ e forem estabelecidas as correspondências com $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-l}$.

Dentro do $SU(4)_{LR} \otimes U(1)_D$ podemos estabelecer as regras de composição de maneira que os seguintes resultados são obtidos:

$$\begin{array}{l} (\mathbf{4}, -1) \otimes (\bar{\mathbf{4}},\ 1) \equiv (\mathbf{1} \oplus \mathbf{15}, 0) \\ (\mathbf{4}, -1) \otimes (\bar{\mathbf{4}},\ 1) \Rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2}, 1) \otimes (\mathbf{2}, \mathbf{2}, -1) \\ \Rightarrow (\mathbf{1}, 0) \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0) \\ \Rightarrow (\mathbf{15}, 0) \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 0) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{3}, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\mathbf{4}, -1) \otimes (\mathbf{4}, -1) \equiv (\mathbf{6}^a \oplus \mathbf{10}^s, -2) \\ (\mathbf{4}, -1) \otimes (\mathbf{4}, -1) \Rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2}, -1) \otimes (\mathbf{2}, \mathbf{2}, -1) \\ \Rightarrow (\ \mathbf{6}, -2) \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -2) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -2) \\ \Rightarrow (\mathbf{10}, -2) \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -2) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{3}, -2) \end{array}$$

Em princípio, uma aproximação para $U(1)_D \equiv U(1)_{B-l}$, apesar de não demonstrada, é conveniente para os cálculos preliminares que pretendemos desenvolver aqui. As conseqüências físicas dessa aproximação são imediatas e significativas: *há um desvinculamento total entre a oscilação de quiralidade estudada como um acoplamento de interação*

[11] Na verdade, ao assumirmos $D = B - l$ estaremos limitando a unificação à álgebra $SU(4)_{LR} \supset SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ que de fato não se apresenta como uma indisponibilidade física.

entre férmions e as interações eletromagnéticas. Essa informação é bastante poderosa no sentido de que abre uma série de possibilidades para acoplamentos de grande unificação.

A unificação em $SU(4)_{LR}$ pode ser descrita como em (19):

$$\begin{aligned} & SU(4)_{LR} \otimes U(1)_D \\ & \supset \quad SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-l} \\ & \Rightarrow \quad SU(4)_{LR} \supset SU(2)_L \otimes SU(2)_R \ . \end{aligned} \tag{19}$$

Conforme (19) podemos escrever a matriz de projeção [13] P para a relação de contingência $(SU(4) \supset SU(2)_L \otimes SU(2)_R)$ através da qual os demais estados, associados a cada representação do $SU(4)_{LR}$, podem ser descritos. A composição em $SU(4)_{LR} \supset SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ para as representações de menor dimensão são descritas a seguir, conforme os *pesos* [13], por::

$[0\,0\,0] \Rightarrow \mathbf{1} \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{1})$
$[1\,0\,0] \Rightarrow \mathbf{4} \equiv (\mathbf{2}, \mathbf{2})$
$[0\,1\,0] \Rightarrow \mathbf{6} \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1})$
$[2\,0\,0] \Rightarrow \mathbf{10} \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{3})$
$[1\,0\,1] \Rightarrow \mathbf{15} \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{3})$
etc.

A representação fundamental do $SU(4)_{LR}$ não é mais descrita como uma soma direta de dubletos do $SU(2)_{L,R}$ e sim como um duodubleto de $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ conforme podemos observar a seguir na expressão (20), que na verdade nada mais é do que o produto direto das representações fundamentais (ν_L, ℓ_L), (ν_R, ℓ_R) do $SU(2)_{L,R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{4} \equiv \quad & (\mathbf{2}, \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{2}, \mathbf{1}) \quad \equiv (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \\ \equiv \quad & \begin{pmatrix} \nu_L & \nu_R \\ \ell_L & \ell_R \end{pmatrix} \quad \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \\ \nu_R \\ \ell_R \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Isto equivale a dizer que quando aplicamos a matriz de projeção sobre um multipleto do $SU(4)_{LR}$ não obtemos diretamente os números quânticos do $SU(2)_L$ ou $SU(2)_R$ mas sim uma combinação linear dos mesmos.

A matriz de projeção é descrita pela expressão (21):

$$\begin{aligned} P(SU(4)_{LR} \supset \quad & SU(2)_L \otimes SU(2)_R) \\ & = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{21}$$

Ou seja, a matriz de projeção aplicada sobre um peso $\mathbf{\Lambda}$ de três componentes no espaço de raízes leva a dois autovalores $\begin{pmatrix} b_+ \\ b_- \end{pmatrix}$ que correspondem a uma combinação linear dos autovalores I_{3L} do $SU(2)_L$ e I_{3R} do $SU(2)_R$ expressa pela relação (22):

$$\begin{aligned} 2(\bar{A}_3 + \bar{A}_{12}) \Rightarrow P \Rightarrow b_+ \equiv 2(I_{3L} + I_{3R}) \\ 2(\bar{A}_3 - \bar{A}_{12}) \Rightarrow P \Rightarrow b_- \equiv 2(I_{3L} - I_{3R}) \ . \end{aligned} \tag{22}$$

4 Resultados Obtidos para os Números Quânticos das Representações do $SU(4)$

Com o desenvolvimento da seção anterior descrevemos nas Tabelas 2, 3, 4 e 5 os autovalores da subálgebra de Cartan associados a cada uma das representações $\mathbf{4}$, $\mathbf{6}$, $\mathbf{10}$ e $\mathbf{15}$ do $SU(4)_{LR}$.

No caso do estudo das interações eletrofracas com simetria $L - R$ outras composições da forma $G \supset SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-l}$ ou $G \supset SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ podem ser estudadas. Temos por exemplo a possibilidade do modelo $Sp(4) \supset SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ com as seguintes regras de composição:

$[0\,0] \Rightarrow \ \mathbf{1} \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{1})$
$[1\,0] \Rightarrow \ \mathbf{4} \equiv (\mathbf{2}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})$
$[0\,1] \Rightarrow \ \mathbf{5} \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{2}, \mathbf{2})$
$[2\,0] \Rightarrow \mathbf{10} \equiv (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})$
etc.

De toda forma, para que se avalie corretamente um modelo com uma simetria de gauge G deve-se estudar a lagrangiana que descreva corretamente um mecanismo físico de interações.

5 Conclusão

Após uma breve discussão do conceito de quiralidade, desenvolvemos os elementos importantes dentro da álgebra de representações do grupo $SU(4)$ que podem ser utilizados no estudo de mecanismos de oscilação de quiralidade *"left-right"* dentro de uma teoria com simetria $SU(4)$.

Obtivemos os números quânticos que caracterizam as representações de menor dimensão do $SU(4)$ de maneira que esses dados possam ser utilizados nos estudos das interações descritas por uma lagrangiana simétrica diante das transformações de um grupo desse grupo.

O prosseguimento deste trabalho consiste em efetivamente estudarmos a lagrangiana, bem como testarmos outras álgebras que possam descrever a oscilação de quiralidade.

Tabela 2: Autovalores para a representação $\mathbf{4} - dim$ *(* $\mathbf{\Lambda}_{max\ SU4} = [1\,0\,0]$ *com* $D = B - l = -1$ *).*

$[\mathbf{\Lambda}]$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_{12}$	$Y_{SU(4)}$	Q	b_+	b_-
$[\ 1\ \ 0\ \ 0]$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$[\ 1]$	$[\ 1]$
$[-1\ \ 1\ \ 0]$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	$[-1]$	$[-1]$
$[\ 0\ -1\ \ 1]$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$[\ 1]$	$[-1]$
$[\ 0\ \ 0\ -1]$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$[-1]$	$[\ 1]$

Tabela 3: Autovalores para a representação $\mathbf{6} - dim$ *(* $\mathbf{\Lambda}_{max\ SU4} = [0\,1\,0]$ *com* $D = B - l = -2$ *).*

$[\mathbf{\Lambda}]$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_{12}$	$Y_{SU(4)}$	Q	b_+	b_-
$[\ 0\ \ 1\ \ 0]$	0	0	1	-1	$[\ 0]$	$[\ 0]$
$[\ 1\ -1\ \ 1]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$[\ 1]$	$[\ 0]$
$[\ 1\ \ 0\ -1]$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$[\ 0]$	$[\ 1]$
$[-1\ \ 0\ \ 1]$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$[\ 0]$	$[-1]$
$[-1\ \ 1\ -1]$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-2	$[-1]$	$[\ 0]$
$[\ 0\ -1\ \ 0]$	0	0	-1	-1	$[\ 0]$	$[\ 0]$

Tabela 4: Autovalores para a representação $\mathbf{10} - dim$ *(* $\mathbf{\Lambda}_{max\ SU4} = [2\,0\,0]$ *com* $D = B - l = -2$ *).*

$[\mathbf{\Lambda}]$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_{12}$	$Y_{SU(4)}$	Q	b_+	b_-
$[\ 2\ \ 0\ \ 0]$	1	0	1	0	$[\ 1]$	$[\ 1]$
$[\ 0\ \ 1\ \ 0]$	0	0	1	-1	$[\ 0]$	$[\ 0]$
$[\ 0\ -2\ \ 2]$	0	1	-1	0	$[\ 1]$	$[-1]$
$[\ 1\ -1\ \ 1]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$[\ 1]$	$[\ 0]$
$[\ 1\ \ 0\ -1]$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$[\ 0]$	$[\ 1]$
$[-1\ \ 0\ \ 1]$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$[\ 0]$	$[-1]$
$[-1\ \ 1\ -1]$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-2	$[-1]$	$[\ 0]$
$[-2\ \ 2\ \ 0]$	-1	0	1	-2	$[-1]$	$[-1]$
$[\ 0\ -1\ \ 0]$	0	0	-1	-1	$[\ 0]$	$[\ 0]$
$[\ 0\ \ 0\ -2]$	0	-1	-1	-2	$[-1]$	$[\ 1]$

Tabela 5: Autovalores para a representação $\mathbf{15} - dim$ ($\mathbf{\Lambda}_{max\ SU4} = [1\,0\,1]$ com $D = B - l = 0$).

$[\mathbf{\Lambda}]$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_{12}$	$Y_{SU(4)}$	Q	b_+	b_-
$[\;1\;\;0\;\;1]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$[\;1]$	$[\;0]$
$[\;1\;\;1\;-1]$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$[\;0]$	$[\;1]$
$[\;1\;-1\;-1]$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	$[\;0]$	$[\;1]$
$[\;2\;-1\;\;0]$	1	0	0	0	$[\;1]$	$[\;1]$
$[\;0\;\;1\;-2]$	0	-1	0	-2	$[-1]$	$[\;1]$
$[\;1\;-2\;\;1]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$[\;1]$	$[\;0]$
$[\;0\;\;0\;\;0]$	0	0	0	-1	$[\;0]$	$[\;0]$
$[\;0\;\;0\;\;0]$	0	0	0	-1	$[\;0]$	$[\;0]$
$[\;0\;\;0\;\;0]$	0	0	0	-1	$[\;0]$	$[\;0]$
$[-1\;\;2\;-1]$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-2	$[-1]$	$[\;0]$
$[\;0\;-1\;\;2]$	0	1	0	0	$[\;1]$	$[-1]$
$[-2\;\;1\;\;0]$	-1	0	0	-2	$[-1]$	$[-1]$
$[-1\;\;1\;\;1]$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	$[\;0]$	$[-1]$
$[-1\;-1\;\;1]$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	-1	$[\;0]$	$[-1]$
$[-1\;\;0\;-1]$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	$[-1]$	$[\;0]$

6 Agradecimentos

Gostaria de agradecer a CAPES, mantenedora financeira dos meus trabalhos no IFGW.

Referências

[1] Y. Fukuda *et al*, Phys. Rev. Lett., **81**, 1562 (1998).

[2] G. Altarelli and F. Feruglio, Phys. Rep., **320**, 295 (1999).

[3] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1, Cambridge University Press, New York, 1995; M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1995.

[4] E. Majorana, Nuovo Cimento, **14**, 171 (1937).

[5] C. W. Kim and A. Pevsner, *Neutrinos in Physics and Astrophysics*, vol.8 of "Contemporary Concepts in Physics", Harwood Academic Publishers, Chur, Switzerland, 1993.

[6] S. L. Glashow, Nucl. Phys., **22**, 579 (1961).

[7] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett., **19**, 1264 (1967).

[8] J. C. Ward and A. Salam, Phys. Lett., **13**, 168 (1964).

[9] A. Salam, *Elementary Particle Theory*, p.367, Almquist & Wiksell, Stocholm, 1968.

[10] R. N. Mohapatra, Phys. Rev., **D12**, 1502 (1975).

[11] R. N. Mohapatra and J. C. Pati, Phys. Rev., **D11**, 556 (1975).

[12] J. C. Pati and A. Salam, Phys. Rev., **D10**, 275 (1974).

[13] R. Slansky, Phys. Rep., **79**, 1 (1981); E. B. Dynkin, Amer. Math. Soc. Trans. Ser., **6**, 111 (1975).