

Gravitação e eletromagnetismo em cinco dimensões

William A. Amorim

Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, 13083-970, Campinas, São Paulo, Brasil
e-mail: wamorim@ifi.unicamp.br

Resumo

O presente artigo tem a finalidade de apresentar ao leitor a teoria de Kaluza que se baseia na idéia da adição de uma dimensão extra às equações de Einstein no espaço vazio para obter, como consequência, a unificação entre a gravitação e eletromagnetismo no espaço quadridimensional. Além disso, apresentamos o mecanismo de compactificação da dimensão extra proposto por Klein. Este mecanismo consiste em adotar uma topologia circular para a quinta dimensão, sugerindo desta maneira que o raio da dimensão é da ordem de grandeza do comprimento de Planck e por isso não é observado experimentalmente.

1 Introdução

Um dos grandes desafios para os físicos neste novo século é construir uma teoria que unifique as interações da natureza. No século XIX duas forças básicas da natureza, eletricidade e magnetismo, foram unificadas começando através dos trabalhos de Ampère e Faraday e culminando em 1879 com o livro ‘*A Treatise on Electricity and Magnetism*’ [2] de Maxwell. Além disso, a unificação entre o espaço tridimensional e o tempo apresentada pelos trabalhos de Minkowski e Einstein motivou, de maneira natural, tentativas de unificação entre interações gravitacionais e eletromagnéticas.

O primeiro a seguir este caminho foi o físico Nordström, que em 1914 propôs a adição de uma dimensão extra para obter a unificação da sua teoria de gravitação, que era descrita por um campo escalar acoplado ao traço do tensor energia-momento, com a teoria eletromagnética de Maxwell.

Em 1916, Einstein publicou seu famoso artigo ‘*Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*’ [1] (Fundamentos da teoria da relatividade geral) onde apresentava sua teoria para gravitação e, dois anos mais tarde, Weyl estendeu a relatividade geral de modo a unificar gravitação e eletromagnetismo. Diferentemente de Nordström ou de Kaluza, que fizeram a hipótese de uma dimensão extra, Weyl escolheu outro caminho para unificação das interações quando alterou a geometria Riemanniana e manteve a sua teoria no espaço quadridimensional.

Kaluza era matemático e, ao que tudo indica, parecia desconhecer a teoria de Nordström. Ele apresentou suas idéias a Einstein em 1919 e após dois anos, Einstein sentiu-se confortável para encorajá-lo a publicar seu trabalho. No artigo publicado em 1921 intitulado ‘*On the unity problem of physics*’ [3], Kaluza mostrou que era possível combinar a gravitação e eletromagnetismo ao acrescentar uma dimensão extra às equações de gravitação de Einstein.

2 A teoria de Kaluza

A idéia de acrescentar uma dimensão extra ao espaço-tempo surgiu após Kaluza observar a semelhança entre os símbolos de Christoffel Γ e o tensor campo eletromagnético de Maxwell F :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu\lambda} &= \frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\end{aligned}\quad (1)$$

com índices gregos variando de 1 a 4. Nesta equação, o campo $g_{\mu\nu}$ representa o tensor métrico e o campo A_μ denota o quadrivetor potencial. Kaluza notou que $F_{\mu\nu}$ se tornaria um símbolo de Christoffel se ele introduzisse uma dimensão extra com uma métrica tal que $\Gamma_{\mu\nu 5} \sim F_{\mu\nu}$. Para isso é necessário identificar $A_\mu = g_{\mu 5}$ e assumir que esta quantidade não dependa da coordenada $x^5 = y$ pertencente ao espaço da quinta dimensão.

Uma característica importante da teoria de Kaluza é que o formalismo matemático é análogo à Relatividade Geral, ou seja, todos os objetos matemáticos se comportam da mesma forma e diferem apenas na variação dos índices tensoriais. Utilizaremos a notação $(\hat{})$ a fim de ressaltar que a quantidade pertence ao espaço de cinco dimensões. Então, um elemento de linha pentadimensional pode ser escrito como

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{AB} d\hat{x}^A d\hat{x}^B, \quad (2)$$

com índices latinos maiúsculos variando de 1 a 5. Kaluza assumiu a métrica

$$\begin{aligned}d\hat{s}^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{55} (dy + g_{\mu 5} dx^\mu)^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (dy + \kappa A_\mu dx^\mu)^2,\end{aligned}\quad (3)$$

tal que κ representa um fator de escala do potencial A_μ (inicialmente tomaremos $\kappa = 1$), e o elemento de linha (eq. 2) torna-se invariante sob as transformações

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu), \quad (4)$$

$$y' = y + f(x^\mu), \quad (5)$$

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu f(x^\mu) \quad (6)$$

onde $f(x^\mu)$ representa uma função arbitrária das coordenadas x^μ de um ponto P num certo sistema de coordenadas L , enquanto x'^μ denota as coordenadas do mesmo ponto P em outro sistema de coordenadas L' .

Em outras palavras, o elemento de linha é invariante sob uma transformação de coordenadas geral (eq. 4) e sob uma transformação da coordenada extra (eq. 5) acompanhada por uma transformação de calibre (eq. 6).

De maneira análoga ao que é feito na teoria da Relatividade Geral, é possível escrever a ação $\hat{S}$ de Einstein-Hilbert no espaço pentadimensional vazio como:

$$\hat{S} = \frac{1}{8\pi\hat{G}} \int \hat{R} \sqrt{\hat{g}} d^4 x dy, \quad (7)$$

onde $\hat{G}$, $\hat{R}$ e $\hat{g}$ representam, respectivamente, a constante gravitacional, o escalar de Ricci e o determinante do tensor métrico no espaço de cinco dimensões.

Através do princípio de mínima ação, obtém-se o análogo das equações de campo de Einstein no espaço vazio:

$$\hat{G}_{AB} = \hat{R}_{AB} - \frac{1}{2} \hat{g}_{AB} \hat{R} = 0, \quad (8)$$

onde os tensores $\hat{G}_{AB}$ e $\hat{R}_{AB}$ denotam o tensor de Einstein e o tensor de Ricci.

Utilizando a métrica (3) e assumindo que todos os campos são independentes¹ da quinta coordenada $x^5 = y$, a equação (8) reduz-se às seguintes equações de campo em quatro dimensões:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (9)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (10)$$

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0 \quad (11)$$

tal que $T_{\mu\nu} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha}$ denota o tensor energia-momento para o campo eletromagnético e identificamos o fator de escala $\kappa = \sqrt{8\pi G}$. No total, quinze equações (10+4+1) foram obtidas como esperado, pois existem quinze elementos independentes na métrica pentadimensional.

As duas primeiras equações são as conhecidas equações de Einstein e Maxwell deduzidas a partir de um vácuo em cinco dimensões², enquanto a última representa uma condição adicional obtida de $\hat{R}_{55} = 0$ pela variação de $\hat{g}_{55}$. Com efeito, substituindo a métrica (3) na ação (7) e identificando a constante gravitacional como

$$G = \hat{G} \left(\int dy \right)^{-1} \quad (12)$$

obtemos:

$$\hat{S} = \frac{1}{8\pi G} \int R \sqrt{g} d^4 x - \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{g} d^4 x, \quad (13)$$

que é a ação de Einstein-Maxwell.

3 O mecanismo de compactificação

Até agora nada foi mencionado sobre a natureza física da quinta dimensão, nem o fato dela não ser observada experimentalmente. Em 1926, o físico sueco Klein estendeu a idéia de Kaluza que havia postulado a independência dos campos com relação à dimensão extra. Motivado pelo desenvolvimento da mecânica quântica, Klein adotou a seguinte propriedade:

(*) a quinta dimensão possui a topologia de um círculo, de modo que a variedade pentadimensional V_5 resulta no produto $V_5 = V_4 \times S^1$, onde V_4 denota uma variedade Riemanniana (espaço-tempo) e S^1 um círculo que é a variedade relacionada ao grupo de simetria $U(1)$ do eletromagnetismo.

Esta propriedade nos indica que qualquer campo $f(x^\mu, y)$ se torna periódico em relação à quinta coordenada, de modo que

$$f(x^\mu, y) = f(x^\mu, y + 2\pi r), \quad (14)$$

onde r representa o raio da quinta dimensão. Isto é equivalente a afirmar que os campos podem ser expandidos em série de Fourier:

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_{\alpha\beta}^{(n)}(x^\mu) e^{iny/r}, \quad (15)$$

$$\hat{A}_\alpha(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_\alpha^{(n)}(x^\mu) e^{iny/r}, \quad (16)$$

onde o índice superescrito (n) denota o n -ésimo termo de Fourier.

4 A quantização da carga elétrica

O caso mais simples para uma teoria de campo no espaço pentadimensional consiste num campo escalar $\hat{\phi}$ sem massa que satisfaça a equação de Klein-Gordon

$$\hat{\square} \hat{\phi}(x^\mu, y) = 0. \quad (17)$$

Como foi visto, pela propriedade adotada por Klein, o campo escalar pode ser expandido como

$$\hat{\phi}(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{iny/r}. \quad (18)$$

¹Esta imposição é conhecida na literatura como condição cilíndrica.

²Esta consequência é algumas vezes denominada de ‘Kaluza-Klein miracle’ (milagre de Kaluza-Klein).

Utilizando a métrica (3) com $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (métrica de Minkowski) e a definição do operador d'Ambertiano, conclui-se que

$$\begin{aligned}\hat{\square} &= \partial_A(\hat{g}_{AB}\partial_B) \\ &= \partial_\mu g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \partial_\nu + \partial_5 \hat{g}^{5\mu} \partial_\mu + \partial_\mu \hat{g}^{\mu 5} \partial_5 + \partial_5 \hat{g}^{55} \partial_5 \\ &= (\partial^\mu - \kappa A^\mu \partial_y)(\partial_\mu - \kappa A_\mu \partial_y) + (\partial_y)^2\end{aligned}\quad (19)$$

Consequentemente, é possível obter infinitas equações desacopladas quando o operador atuar sobre a expansão de Fourier do campo escalar (eq. 18), isto é,

$$\left[(\partial^\mu - i \frac{n\kappa}{r} A^\mu)(\partial_\mu - i \frac{n\kappa}{r} A_\mu) - m_n^2 \right] \phi^{(n)}(x^\mu) = 0,$$

com³

$$m_n = \frac{n}{r}. \quad (21)$$

Essas equações indicam que os modos de Fourier diferentes de zero, além de terem massa, também possuem carga, pois comparando o operador $(\partial_\mu - i \frac{n\kappa}{r} A_\mu)$ com a regra de acoplamento mínimo da eletrodinâmica quântica

$$-i\hbar\partial_\alpha \longrightarrow -i\hbar\partial_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha, \quad (22)$$

é possível observar que a carga elétrica do n -ésimo modo é dada por

$$q_n = \frac{n\kappa\hbar}{rc}, \quad (23)$$

que é associada à partícula de massa m_n .

Identificando a carga q_1 do primeiro modo de Fourier com a carga do elétron e , verifica-se que

$$e = \frac{k\hbar}{rc} = \frac{\sqrt{8\pi G\hbar}}{rc}. \quad (24)$$

Desta forma, o raio da dimensão extra pode ser calculado como

$$r^2 = \frac{8\pi G\hbar^2 c}{e^2 c^3}, \quad (25)$$

onde identificamos a constante de estrutura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (26)$$

e o comprimento de Planck

$$\lambda_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 10^{-35} m, \quad (27)$$

a fim de escrever

$$r = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \lambda_P \approx \sqrt{274} \lambda_P. \quad (28)$$

Este resultado surpreendente sugere que o valor extremamente pequeno do raio é o motivo pelo qual a quinta dimensão não é observada de maneira direta, como ocorre com as dimensões espaciais.

Por outro lado, o baixo valor do raio implica que as massas (eq.21) associadas a esses campos são altíssimas (da ordem de grandeza da massa de Planck $m_P \approx 10^{19}$ GeV), de modo que qualquer teste experimental nos aceleradores de partículas atuais torna-se impossível.

5 Conclusão

Em resumo, a teoria de Kaluza-Klein unifica de maneira elegante, as interações gravitacionais e eletromagnéticas, deduzindo as equações de Einstein-Maxwell no espaço-tempo a partir das equações de campo de Einstein num espaço pentadimensional vazio. Neste sentido, a fonte eletromagnética quadridimensional é uma manifestação de pura geometria em cinco dimensões.

Contudo, um vínculo (eq. 11) é imposto no espaço quadridimensional quando $\hat{R}_{55} = 0$. Isto ocorre porque não existe nenhuma equação de movimento associada a g_{55} , devido à condição $g_{55} = 1$ da métrica adotada por Kaluza.

Assumindo uma topologia circular com uma escala muito pequena, Klein não só sugeriu uma explicação para a independência da dimensão extra dentro dos limites experimentais, mas também obteve, como consequência, a quantização da carga elétrica. Por outro lado, as massas dos modos diferentes de zero são muito grandes, portanto as partículas carregadas que conhecemos não podem ser identificadas com os modos de Kaluza-Klein.

6 Agradecimentos

Gostaria de agradecer à Professora Carola D. Chinellato, pelas observações e críticas pertinentes, e à CAPES pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] A. Einstein, *Annals of Phys.* **49**, 769 (1916).
- [2] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover, New York, 1954.
- [3] T. Appelquist, A. Chodos, P. G. O. Freund, *Modern Kaluza-Klein Theories*, Addison-Wesley, Oxford, 1987
- [4] Wald, Robert M., *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984

³Em geral, a escala [*comprimento*]⁻¹ para massa representa uma característica de campos massivos provenientes de uma redução dimensional de um espaço de dimensão mais alta.

- [5] M. J. Duff, *Kaluza-Klein theory in perspective*, Oskar Klein Centenary Nobel Symposium, Hep-th/9410046,(1994).
- [6] J. M. Overduin, P. S. Wesson, Phys. Report., **283**, 303 (1997).
- [7] Antonello Pasini, Europe J. Physics, **289**, 9 (1988).