No interior do horizonte de um buraco negro de Schwarzschild

Matheus Pereira Lobo

Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona 145, 01405-900, São Paulo, SP, Brasil
e-mail: lobo@ft.org.br

Resumo

O conceito de um buraco negro newtoniano é discutido levando a um horizonte de eventos que coincide com o raio de Schwarzschild. A métrica de Schwarzschild é apresentada e em seguida é deduzido um sistema de coordenadas no qual não há singularidades no horizonte de eventos. A partir desse sistema de coordenadas é calculado o tempo próprio que um observador leva para percorrer a distância do horizonte ao centro de um buraco negro de Schwarzschild. Em seguida é definida uma região de desconforto, no qual um observador em queda livre começa a ser esticado com uma força equivalente ao seu peso. Finalmente, a duração do desconforto durante a queda é calculada e conclui-se que esse tempo vale 0,3 segundo para todo e qualquer buraco negro de Schwarzschild.

1 Introdução

A idéia sobre a existência de “estrelas escuras", hoje denominados buracos negros, é antiga e data, pelo menos, do final do século XVIII. Em 1784, o geólogo e astrônomo John Michell especulou sobre a existência de corpos celestes tão massivos que nem mesmo a luz seria capaz de escapar de sua atração gravitacional [1]. Seus cálculos basearam-se na teoria de Newton em que a luz era constituída de partículas. Michell supôs corretamente que as partículas de luz eram atraídas gravitacionalmente do mesmo modo que outros corpos massivos. Ele argumentou que, para um corpo escapar permanentemente de um campo gravitacional, o mesmo deve ser lançado da superfície com uma velocidade mínima - a velocidade de escape. No caso da Terra, por exemplo, a velocidade de escape é de 11,2 km/s. Michell observou que, se a massa de um objeto fosse grande o suficiente, a velocidade de escape seria superior à velocidade da luz. Dessa forma, a luz proveniente do corpo não chegaria a um observador distante tornando-o escuro. Alguns anos mais tarde essas idéias foram defendidas pelo famoso matemático francês Pierre Laplace. Apesar da reconhecida reputação de Laplace como cientista, a especulação sobre “estrelas escuras" levou bastante tempo para ser levada a sério.

Um estudo mais preciso sobre buracos negros só foi possível com o advento da teoria da relatividade geral, formulada por Einstein em 1915 [2]. Em menos de dois meses após a publicação da relatividade, o astrônomo alemão Karl Schwarzschild, que já acompanhava os trabalhos de Einstein em gravitação, encontrou uma solução para as equações de Einstein. A solução de Schwarzschild descreve o campo gravitacional gerado por fontes esféricas e sem rotação. Curiosamente, a solução de Schwarzschild revela a existência de um raio crítico, denominado raio de Schwarzschild, no qual nada consegue escapar, nem mesmo a luz. Objetos menores que o raio de Schwarzschild são chamados buracos negros. Toda a massa de um buraco negro está concentrada em seu centro. O termo buraco negro vem do fato de que em seu interior há um grande “buraco” pois toda sua massa está concentrada em seu centro e como nem mesmo a luz escapa de sua atação gravitacional ele é dito negro.

No ocidente, o maior responsável por trazer a questão do colapso gravitacional para o campo científico foi John Archibald Wheeler, da Universidade de Princeton, cunhador do termo buraco negro. Mas, na época, devido à singularidade contida no raio de Schwarzschild, boa parte da comunidade acreditava que tal raio representava uma barreira física intransponível, denominada “círculo mágico". O problema da singularidade no raio de Schwarzschild foi resolvido formalmente e de forma independente em 1960 por Martin Kruskal [3] e em 1958 por David Finkelstein [4] dos Estados Unidos e George Szekeres da Austrália [5]. Eles perceberam que a singularidade do raio de Schwarzschild era um artifício puramente matemático: não há singularidades físicas de fato. Dessa forma, é possível estudar as conseqüências, no nível clássico, de um objeto no interior do horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild, como veremos a seguir.

2 Buraco Negro newtoniano

Conforme mencionado anteriormente, a teoria de Newton prevê a existência de estrelas escuras. No sentido newtoniano, qualquer partícula lançada de uma estrela escura a partir de seu raio crítico, incluindo a luz, seria inicialmente projetada para fora da estrela mas retornaria a ela devido sua atração gravitacional intensa. O objetivo desta seção é calcular o raio crítico de uma estrela escura de acordo com a teoria de Newton. Inicialmente será calculada a velocidade de um objeto com massa m_{kg} solto a partir do repouso caindo em direção a um buraco negro de massa M_{kg}. Em unidades convencionais, a energia potencial $V(r)$ de um corpo de massa m_{kg} no campo gravitacional de um objeto esférico de massa M_{kg} vale:

$$V(r) = -\frac{GM_{kg}m_{kg}}{r},$$

onde G é a constante gravitacional de Newton. A energia do corpo de massa m_{kg} é conservada e vale:

$$E = 0 = \frac{1}{2}m_{kg}v_{conv}^2 - \frac{GM_{kg}m_{kg}}{r},$$

onde v_{conv} é a velocidade do objeto em queda medida em unidades convencionais, metros/segundo. Assim, temos:

$$v_{conv} = \left(\frac{2GM_{kg}}{r}\right)^{1/2}.$$

Transformando a velocidade em unidades naturais e a massa em unidades de comprimento pelas relações $v = v_{conv}/c$ e $M = M_{kg}(G/c^2)$, temos:

$$v = \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}. \qquad (1)$$

A equação acima pode ser usada para encontrarmos o raio crítico do buraco negro de massa M. Suponha que o corpo seja arremessado para fora do centro de atração a partir de um raio r com uma velocidade dada pela equação (1). A mecânica newtoniana, que funciona igualmente bem, invertendo a ordem temporal do processo, prediz que o corpo entrará em repouso a uma grande distância da estrela de massa M. Portanto, a equação (1) nos fornece a velocidade de escape do objeto, isto é, sua velocidade mínima necessária para escapar do centro de atração.

Consideremos que a máxima velocidade de escape seja a velocidade da luz, que em unidades naturais vale 1. Substituindo este valor em (1) encontramos o menor raio da estrela de massa M no qual a luz pode escapar:

$$r_{horizonte} = 2M. \qquad (2)$$

Este valor representa o raio do horizonte de eventos de uma estrela predito pela teoria de Newton, que coincide com o valor previsto pela relatividade geral de Einstein.

Vale a pena ressaltar a diferença entre a teoria de Newton e a teoria de Einstein na descrição de buracos negros. De acordo com Newton, um objeto lançado do horizonte com uma velocidade menor que a da luz viajaria a uma distância finita e depois retornaria à estrela. A teoria de Einstein prediz que nada, nem mesmo a luz, consegue escapar do horizonte de eventos de um buraco negro. Segundo a relatividade geral, se um raio de luz fosse lançado *exatamente* no horizonte de eventos de um buraco negro, o raio seria incapaz de viajar sequer um milímetro para fora!

3 Buraco Negro de Schwarzschild

Os buracos negros de Schwarzschild são os mais simples que podem ser encontrados no universo [6,7]. A solução de Schwarzschild descreve o espaço-tempo ao redor de um centro de atração esfericamente simétrico e sem rotação. Em relatividade geral, descrever o espaço-tempo correspondente é equivalente a fornecer uma métrica que seja solução das equações de Einstein [8,9,10]. A métrica é um objeto matemático que fornece *distâncias espaço-temporais*, isto é, ela mostra como nossas réguas e relógios são afetados pela presença de um corpo massivo.

A métrica de Schwarzschild, que descreve o espaço-tempo para dois eventos infinitesimalmente próximos e fora de um centro de atração de massa M esfericamente simétrico e sem rotação, na forma tipo-tempo vale

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2 d\phi^2, \qquad (3)$$

e na forma tipo-espaço é dada por

$$d\sigma^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\phi^2, \qquad (4)$$

onde $d\tau$ é o tempo próprio e $d\sigma$ é a distância própria.

A métrica de Schwarzschild possui uma aplicação tecnológica imediata nos dias de hoje em um dispositivo denominado GPS (*Global Positioning System*) [11,12]. O GPS é amplamente usado nos sistemas de aviação e opera graças à revolução científica engendrada por Einstein. Sem a relatividade geral o GPS não teria utilidade alguma. O *Sistema de Posicionamento Global* (GPS) possibilita-nos determinar nossa posição tridimensional na Terra com uma precisão de poucos metros. O GPS inclui 24 satélites em órbitas circulares em torno da Terra, cada uma com um período de 12 horas, distribuídos em 6 planos com ângulos igualmente espaçados. Cada satélite possui um relógio atômico e emite sinais eletromagnéticos com informações sobre sua localização. Para o funcionamento de um GPS, são necessários pelo menos 4 satélites, 3 responsáveis por cada coordenada espacial e 1 para que o dispositivo fique sincronizado e tenha a precisão de um relógio atômico. Hoje, existem aparelhos GPS do tamanho de um celular e podem ser adquiridos por cerca de cem dólares.

O intuito deste artigo não é derivar a métrica de Schwarzschild. Contudo, as seguintes considerações mostram-se esclarecedoras:

- O fator de curvatura *(1-2M/r)* que aparece em *dt* e *dr* depende apenas de *r* uma vez que o centro de atração é esfericamente simétrico, isto é, o objeto é o mesmo para qualquer valor de ϕ. Por isso não se pode ter um valor de curvatura dependente de ϕ.

- No limite de grandes distâncias a curvatura tende a 1 como era de se esperar. Longe da fonte o campo gravitacional se aproxima de zero e a métrica de Schwarzschild se aproxima a uma métrica do espaço-tempo plano.

- Para *M=0*, a métrica de Schwarzschild se reduz novamente a uma métrica onde o espaço-tempo é plano, como deveria. Ausência de fontes não produz curvatura.

A métrica de Schwarzschild descreve todo e qualquer fenômeno não quântico do espaço-tempo ao redor de um centro de atração esfericamente simétrico e sem rotação. A equação (3) apresenta uma singularidade em *r=2M*, nesta região o termo espacial de curvatura diverge. No entanto, tal singularidade pode ser removida com uma escolha apropriada do sistema de coordenadas, como veremos a seguir. Na seção 5 será calculado o tempo próprio que um observador cruzando o horizonte de um buraco negro de Schwarzschild leva para atingir o seu centro.

4 Referencial de Queda Livre

Os diferenciais dt, dr, e $d\phi$ das equações (3) e (4) representam as coordenadas de Schwarzschild, isto é, medidas feitas por observadores distantes como se o espaço-tempo fosse plano. Consideraremos um referencial em queda livre aquele em que o observador cai a partir do repouso a uma grande distância em relação ao centro de atração. Sejam dt_{queda}, dr_{queda} e $d\phi_{queda}$ medidas feitas por observadores no referencial em queda livre. É necessário adotarmos um terceiro sistema de coordenadas, conveniente para nossos cálculos. Seja um dado sistema de coordenadas cujas medidas são realizadas por observadores situados em pequenas conchas distribuídas ao redor do centro de atração. As medidas de tais observadores são dadas por dt_{concha}, dr_{concha} e $d\phi_{concha}$. (Note que, pela simetria da fonte, temos $d\phi_{concha} = d\phi_{queda} = d\phi$.

A métrica no referencial em queda livre é obtida em duas etapas. Primeiro, relacionando as coordenadas usuais (Schwarzschild) com as coordenadas na concha e em seguida relacionando as coordenadas na concha com as coordenadas em queda livre. Considere dois eventos simultâneos no referencial da concha cuja separação seja descrita pela equação (4). A distância própria medida entre os dois eventos (com $d\phi = 0$) no referencial da concha vale:

$$d\sigma = dr_{concha} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr. \qquad (5)$$

Similarmente, sejam dois eventos não simultâneos no referencial da concha com separação espacial zero. Neste caso, a equação (3) fornece o tempo próprio medido entre os dois eventos no referencial da concha:

$$d\tau = dt_{concha} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt. \qquad (6)$$

Cada concha enxerga localmente o observador em queda com uma velocidade constante. Por isso, a transformação de coordenada da concha para o referencial em queda é dada pela transformação de Lorentz da relatividade especial [13,14]:

$$dt_{queda} = -v_{rel}\gamma dr_{concha} + \gamma dt_{concha}, \qquad (7)$$

onde v_{rel} é a velocidade do observador em queda livre medida na concha e $\gamma = (1 - v_{rel}^2)^{-1/2}$. Substituindo as equações (5) e (6) em (7), temos:

$$dt = \frac{dt_{queda}}{\gamma(1 - 2M/r)^{1/2}} + \frac{v_{rel}dr}{\gamma(1 - 2M/r)}. \qquad (8)$$

Um objeto de massa *m* e energia *E*, caindo a partir do repouso no infinito tem o observável *E/m* constante durante todo o trajeto (mais detalhes, ver ref. [7]). Na geometria de Schwarzschild, *E/m* vale:

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}. \quad (9)$$

Lembrando que no infinito *E/m=1* e combinando as equações (3) e (9), a velocidade do observador em queda, medida nas coordenadas do referencial distante vale:

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}. \quad (10)$$

Dessa forma, usando as equações (5), (6) e (10), temos:

$$v_{rel} = \frac{dr_{concha}}{dt_{concha}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}. \quad (11)$$

Usando o fato que $dr_{concha} = \gamma dr_{queda}$ (contração espacial de Lorentz) combinado com a equação (5) é fácil ver que $dr_{queda} = dr$, isto é, as distâncias medidas por um observador em queda são as mesmas que as medidas por um observador distante.

Substituindo a equação (11) em (8) e combinando o resultado com a equação (3), encontramos finalmente a métrica no referencial em queda livre:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2_{queda} - 2\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt_{queda}\,dr - dr^2 - r^2 d\phi^2. \quad (12)$$

A métrica (12) pode ser usada em qualquer região ao redor de um buraco negro sem rotação. A equação (12) é a métrica de Schwarzschild escrita no referencial em queda livre, sem a singularidade em *r=2M*. A nossa habilidade em escrever a métrica de Schwarzschild em uma forma sem singularidades em r=2M é uma indicação de que não há barreiras físicas intransponíveis no horizonte de eventos.

5 Entrando no Horizonte de Eventos

A entrada no horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild por um observador em queda livre, é sentida, em toda a sua glória, de forma não muito diferente do que em qualquer outro trajeto de sua queda. Nada de especial ocorre, nenhuma turbulência é sentida quando um observador cruza o horizonte de eventos. Entrar no horizonte de eventos é um caminho sem volta. O objetivo desta seção é calcular quão doloroso e desconfortável é cair em direção ao centro de um buraco negro de Schwarzschild.

Em primeiro lugar será calculado o tempo próprio de queda do horizonte ao centro do buraco negro de um observador solto a partir do repouso no infinito. Conforme discutido anteriormente, usando o fato que *E/m=1* [equação (9)] e associando à equação (10), temos:

$$d\tau = -\frac{r^{1/2}dr}{(2M)^{1/2}}. \quad (13)$$

Integrando ambos os lados desta expressão de *r=2M* a *r=0*:

$$\tau = -\int_{2M}^{0} \frac{r^{1/2}dr}{(2M)^{1/2}} = \frac{4}{3}M. \quad (14)$$

Esse é o tempo próprio que um observador mede do horizonte ao centro do buraco negro, expresso em unidades naturais. Para transformar em segundos basta dividir pela velocidade da luz:

$$\tau_{seg} = \frac{4}{9}\cdot 10^{-8} M = 6{,}57\cdot 10^{-6}\frac{M}{M_{Sol}}. \quad (15)$$

Portanto, para um buraco negro com 1 massa solar, o tempo próprio de queda do horizonte ao centro será de $6{,}57\mu s$. Para um buraco negro com massa $M = 1{,}42\cdot 10^{17} m$, um observador caindo a partir do repouso no infinito levaria cerca de 20 anos para percorrer a distância do horizonte ao centro desse gigantesco buraco negro.

Tomando a derivada com relação ao tempo próprio na equação (13), encontramos a aceleração do observador em queda nas coordenadas mistas *r* e τ:

$$g_{queda} \equiv \frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^2}. \quad (16)$$

A aceleração da gravidade será maior nos pés e menor na cabeça de um observador que cai em direção ao centro de um buraco negro. Essa diferença é dada por:

$$dg_{queda} = \frac{2M}{r^3}dr. \quad (17)$$

Suponha que o observador em questão comece a sentir um desconforto a partir do momento em que a diferença gravitacional entre os seus pés e a sua cabeça seja igual à aceleração da gravidade na Terra, isto é, quando começar a sentir os seus pés sendo puxados para baixo com uma força equivalente a metade de seu peso e a sua cabeça sendo puxada para cima com a mesma força. Assim, sendo $dg_{queda\ dor} = g_{Terra}$, temos:

$$r_{dor} = \left(\frac{2Mdr}{g_{Terra}}\right)^{1/3}, \qquad (18)$$

A dor e o desconforto começam a aparecer em r_{dor}, podendo ser fora ou dentro do horizonte de eventos. Para um objeto com 10 massas solares, por exemplo, r_{dor} situa-se a uma distância 284 vezes maior que o horizonte de eventos; já para uma estrela com 50 mil massas solares, o desconforto começa no próprio horizonte de eventos. Por mais paradoxal que possa parecer, para o "buraco negro de 20 anos" mencionado acima, o desconforto começa a aparecer a uma distância de aproximadamente 178 milhões de km do centro, 600 mil vezes menor que o raio de Schwarzschild.

Integrando a equação (13) e usando a equação (18) podemos encontrar o tempo próprio de desconforto sentido pelo observador em queda livre:

$$\tau_{dor} = -\int_{r_{dor}}^{0} \frac{r'^{1/2}\, dr'}{(2M)^{1/2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{dr}{g_{Terra}}\right)^{1/2}. \qquad (19)$$

Surpreendentemente, o tempo de aflição entre o início do desconforto e a "colisão" com o centro **independe** da massa do buraco negro! Considerando *dr=2m* (comprimento do objeto em queda) e sendo $g_{Terra} = 10^{-16} m^{-1}$, temos que $\tau_{dor} = 0{,}3s$. Portanto, para todo e qualquer buraco negro de Schwarzschild, o tempo de queda desconfortável é de 0,3 segundo. Alguns médicos afirmam que o sinal de dor se propaga pelo corpo a uma velocidade de aproximadamente *1m/s*. Portanto, podemos concluir que cair em um buraco negro de Schwarzschild pode não ser tão ruim!

6 Conclusões

Os buracos negros representam um grande desafio teórico para a comunidade científica. Embora os desafios mais significativos encontrem-se no nível quântico, a análise de suas propriedades clássicas é um exercício construtivo pois possibilita-nos treinar, guiar e disciplinar a nossa intuição física. Apesar da existência de buracos negros ter sido especulada no final do século XVIII, a relatividade geral foi a responsável por trazer subsídios teóricos que nos permitem inferir certas propriedades quantitativas de tais objetos. A comprovação experimental de sua existência por meios mais diretos, porém, constitui um dos maiores desafios experimentais da atualidade.

Agradecimento: O autor agradece o apoio financeiro da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

7 Bibliografia

[1] J. Michell, Philos. Trans. R. Soc. London **74**, 35 (1784).
[2] A. Einstein, H.A. Lorentz, H. Weyl, H. Minkowski, *The Principle of Relativity*, Dover Publications, New York, 1952.
[3] M.D. Kruskal, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).
[4] D. Finkelstein, Phys. Rev. **110**, 965 (1958).
[5] P. Davies, *About Time*, Simon & Schuster, New York, 1996.
[6] K.S. Thorne, *Black Holes and Time Warps*, W.W. Norton & Company, New York, 1994.
[7] E.F. Taylor, J.A. Wheeler, *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, Boston, 2000.
[8] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman, New York, 1973.
[9] R.M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.
[10] P.A.M. Dirac, *General Theory of Relativity*, Princeton University Press, Princeton, 1996.
[11] C.M. Will, *Was Einstein Right? Putting General Relativity to the Test*, Basic Books/Perseus Group, New York, 1993.
[12] C.O. Alley, *Quantum Optics*, *Experimental Gravity*, *and Measurement Theory*, Plenum Publishing, New York, 1983.
[13] E.F. Taylor, J.A. Wheeler, *Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity*, W.H. Freeman, New York, 2nd edition, 1992.
[14] A.P. French, *Special Relativity*, W.W. Norton & Company, New York, 1968.