

Introdução à modelagem física dos instrumentos musicais

Thiago Corrêa de Freitas^{1,2,*} e Albary Laibida Junior²

¹*Tecnologia em Construção de Instrumentos Musicais-Luteria, Universidade Federal do Paraná, Praça Santos Andrade 50,80020-300 Curitiba, Paraná, Brasil*

²*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, C. P. 19044, 81531-990, Curitiba, Paraná, Brasil*

Este trabalho objetiva apresentar os fundamentos físicos dos instrumentos musicais, os quais serão divididos nas seguintes categorias: instrumentos com cordas, membranas, barras e tubos. Os instrumentos foram agrupados segundo o mecanismo gerador de som. Para cada um deles serão apresentadas as formulações matemáticas em termos de equações diferenciais e soluções para determinados casos simples. Assim pretendemos descrever com a abrangência cabível neste artigo os instrumentos musicais segundo as categorias citadas.

1. INTRODUÇÃO

Diante da falta de textos em língua portuguesa inerentes ao assunto e também pelo fato dos poucos existentes tratarem o tema de forma trivial [1] ou, quando muito, excessivamente especializada [2, 3], elaboramos um trabalho no qual o tema é abordado de forma concisa, cujo ponto de partida é a formulação diferencial, e culmina com a obtenção e análise das soluções de alguns casos simples.

Inicialmente trataremos do problema das cordas, classificando-as segundo os mecanismos de perturbação associados, formando os seguintes grupos: cordas friccionadas, percutidas, dedilhadas e tangidas.

Pretendemos mostrar como uma membrana pode ser entendida como uma extensão para duas dimensões de uma corda, tratando um caso que pode modelar o tímpano.

O xilofone, a celesta e outros instrumentos providos de barras serão discutidos com o intuito de diferenciar a formulação das barras da formulação de membranas.

Os tubos, que formam a classe dos instrumentos de sopro como flautas, clarinetes, trompetes, e de teclado como o órgão, serão descritos segundo o tipo de tubo, aberto ou fechado, que os forma. Também é resolvido o problema de um tubo com um furo, o qual dependendo das condições de contorno sobre as extremidades pode ser usado como modelo simples para instrumentos musicais como a flauta ou o clarinete.

A modelagem de instrumentos musicais é atualmente tema de pesquisa, o leitor interessado em estudos mais avançados dispõe dos trabalhos de: Boutillon [4] o qual faz um tratamento não-linear das cordas friccionadas; Woodhouse *et al.* [5] investigam ondas longitudinais e torsionais em cordas; Gough [6] dá atenção as vibrações do corpo dos instrumentos e faz modelagem numérica destes; McLennan [7] estuda o comportamento de instrumentos musicais em atmosferas compostas por diferentes gases; Matsutani [8] realiza estudos aplicados

sobre instrumentos musicais.

Um tratamento não tão técnico é dado por Jansson [9], em trabalho direcionado para construtores de instrumentos e os conceitos são desenvolvidos de forma intuitiva. Praticamente todos os instrumentos são descritos com suas particularidades e, também, com um grande número de referências no livro de Henrique [10]. A relação entre o funcionamento dos instrumentos musicais e como isso influencia na execução musical é descrita por Jeans [11] e também por Olson [12].

Existe o software livre *Audacity* [13] que permite manipular arquivos de som de modo a visualizar a forma de ondas sonoras e obter o espectro de um som através da transformada de Fourier. Aplicações interessantes de modelagem física em síntese de som são encontradas no trabalho de Välimäki *et al.* [14] e, finalmente em diversos sítios da World Wide Web como por exemplo [15], onde são tratados síntese de instrumentos musicais e sintetizadores de som.

2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Antes de tratar do problema aplicado, será feita uma revisão das equações diferenciais [16] associadas aos problemas tratados e, as suas soluções.

Sendo c a velocidade de propagação da perturbação no meio em questão, equações da seguinte forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

onde $f(x, t)$ representam o deslocamento da posição de equilíbrio em função da posição e do tempo, podem ser separadas fazendo $f(x, t) = f_0 + F(x)T(t)$, onde f_0 é constante, $F(x)$ se associa à parte espacial e $T(t)$ à parte temporal. Usando $-k^2$ como constante de separação, onde k é o número de onda, a variável que determina o comportamento espacial da onda, logo

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{F(x)} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} = -k^2 \quad (2)$$

*thcfreitas@yahoo.com.br

Assim tem-se uma equação espacial em $F(x)$ e outra temporal em $T(t)$, nominalmente:

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} + k^2 F(x) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + k^2 c^2 T(t) = 0. \tag{4}$$

Para ambas trabalharemos com as famílias de soluções oscilatórias, sendo A e B constantes a serem definidas pelas condições de contorno. Definindo a frequência angular através da relação de dispersão $\omega = kc$, lembrando a relação entre a frequência e a frequência angular como sendo $\omega = 2\pi f$, e introduzindo uma fase ϕ na solução temporal, a ser determinada pelas condições iniciais, temos

$$F(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx), \tag{5}$$

$$T(t) = \cos(\omega t + \phi). \tag{6}$$

O mesmo processo pode ser usado para a equação da viga

$$\frac{1}{c^4} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} = 0 \tag{7}$$

onde $-k^4$ é usado como constante de separação, resultando na eq.(4), para a parte temporal, porém com a seguinte relação de dispersão $\tilde{\omega} = k^2 c^2$, onde a frequência angular passa a ser proporcional ao quadrado do número de onda.

Para a parte espacial resulta

$$\frac{d^4 F(x)}{dx^4} - k^4 F(x) = 0 \tag{8}$$

cujas soluções de interesse serão obtidas com mais detalhes na seção 5, por ser raramente tratada em livros de Física e geralmente fazendo parte do conteúdo opcional nem sempre visto nos cursos de cálculo integral e diferencial [16].

3. CORDAS

Amplamente utilizadas em instrumentos musicais dos mais diversos tipos, as cordas produzem sonoridades também bastante diversas. Nas cordas friccionadas a energia que induz à vibração da corda advém da fricção de um arco com a mesma, sendo esta então continuamente excitada, como no violino, na viola e no violoncelo. Cordas dedilhadas são aquelas cuja energia é fornecida simplesmente dedilhando-se-as, a excitação destas ocorre em um hiato bastante curto e posteriormente vibram livremente. Funcionam segundo este mecanismo o violão e o alaúde, dentre outros.

Também é possível fornecer energia para cordas por meio de um mecanismo que as tange. No caso de uma

guitarra elétrica, cavaquinho ou bandolim, onde temos a palheta ou plectro. No cravo, temos um mecanismo que aciona uma espécie de plectro de pena de ganso ou casco de tartaruga contra a corda. No caso do piano existe uma peça móvel chamada martelo, o qual colide diretamente com as cordas, fornecendo assim energia para elas vibrarem, sendo estas as cordas percutidas.

A evolução espaço-temporal de uma corda é regida pela seguinte equação

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \tag{9}$$

onde a função $f(x, t)$ representa o deslocamento da posição de equilíbrio da corda em função do espaço e do tempo e c é a velocidade de propagação da onda na corda. A dedução detalhada desta equação pode ser encontrada em [17]. A separação desta equação, com $f_0 = 0$, resulta na eq.(3) para a parte temporal cuja solução é dada pela eq.(6) e na eq.(4) para a parte espacial, cuja solução, eq.(5), deve satisfazer as condições de contorno para uma corda fixa em ambas as extremidades: $f(x = 0, t) = f(x = L, t) = 0$. A primeira condição aplicada a eq.(5) leva a $A = 0$, e da segunda condição é necessário que se verifique a igualdade $B \sin(kL) = 0$. Para que a solução não seja trivial é necessário que $k = \frac{n\pi}{L}$, com n inteiro.

Assim a solução geral pode ser escrita como uma combinação linear adequada destas soluções para cada valor de n , onde $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$, sendo C_n o coeficiente que está associado à intensidade de cada harmônico e ϕ_n a fase associada ao n -ésimo harmônico, a qual advém das condições iniciais.

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t - \phi_n). \tag{10}$$

O comportamento espacial do primeiro harmônico, $n = 1$, e do segundo harmônico, $n = 2$, correspondente à eq. (10) é mostrado na figura 1.

Sendo μ a densidade linear da corda e τ a tensão aplicada na corda, a energia cinética $E_k(t)$ e a energia potencial $E_p(t)$ da corda são dadas por

$$E_k(t) = \frac{\mu}{2} \int_0^L \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx$$

$$E_p(t) = \frac{\tau}{2} \int_0^L \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx.$$

Inserindo a eq.10 nas expressões acima, tomando suas médias temporais sobre um período e somando-as, obtemos a energia do n -ésimo harmônico:

$$E_n = \frac{\mu L}{4} \omega_n^2 C_n^2.$$

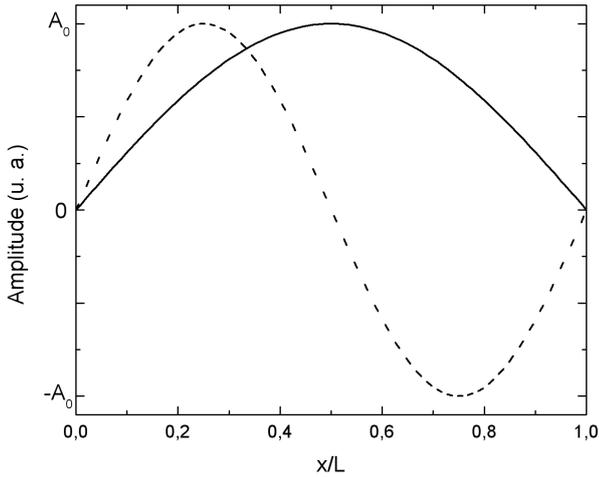


Figura 1: Amplitude do primeiro modo normal, linha cheia, e segundo modo normal, linha pontilhada, de uma corda presa nas duas extremidades, como função de x/L , sendo A_0 o valor máximo do deslocamento com relação à posição de equilíbrio da corda.

Isto sugere que cada modo de vibração pode ser considerado como possuindo um valor próprio de energia, sendo independente dos demais. Para as cordas percutidas os coeficientes seguem $C_n \propto n^{-1}$ e para as cordas dedilhadas e friccionadas $C_n \propto n^{-2}$.

Como se verifica na figura 1, cada harmônico está associado a uma divisão geométrica da corda em segmentos iguais, de tal forma que para um harmônico n qualquer, a corda se divide em n segmentos iguais de comprimento L/n . No caso de um violão, quando se dedilha a corda exatamente no meio, o primeiro harmônico é favorecido pois possui um máximo nesta posição, porém o segundo harmônico é assim eliminado uma vez que apresenta um nó nesta posição. Sempre que uma corda é dedilhada, friccionada ou percutida em L/n , ocorre a eliminação do harmônico associado a n , o que provoca mudanças no timbre obtido. Isso é usado no piano [3], onde o martelo atinge a corda em $L/9$ de sua extremidade, eliminando o 9º harmônico, o que dá um timbre mais agradável ao som.

4. MEMBRANAS

Uma membrana pode ser entendida como sendo a extensão para mais uma dimensão espacial de uma corda, desta forma deseja-se obter o deslocamento de um ponto (x,y) em torno da posição de equilíbrio como função do tempo. A equação diferencial associada à membrana bidimensional [18] é:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial y^2}. \quad (11)$$

Supondo uma solução que seja o produto de uma parte temporal, a qual oscila com frequência angular ω e possui fase ϕ , e uma parte espacial $h(x, y)$, da forma

$$f(x, y, t) = \cos(\omega t - \phi)h(x, y). \quad (12)$$

A equação de onda será satisfeita se e somente se

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] h(x, y) = 0. \quad (13)$$

Para o caso de uma membrana circular, a qual pode ser usada como modelo para as vibrações da membrana de um tímpano, no qual uma baqueta que colide com a membrana fornece energia para as vibrações, é conveniente o uso de coordenadas polares, pois desta forma as condições de contorno se expressam de forma simplificada. Como a membrana encontra-se engastada em suas extremidades devemos ter $h(r = a, \theta) = 0$, sendo a o raio da membrana. Para a variável θ exige-se a condição de periodicidade.

Reescrevendo a equação diferencial (11) em coordenadas polares temos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Supondo a solução como um produto de três funções da forma $f(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, onde $R(r)$ está associada à parte radial da solução, $\Theta(\theta)$ à parte angular e $T(t)$ à parte temporal, a equação torna-se separável dando origem às equações

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k^2 c^2 T(t) \quad , \quad \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = \chi \Theta(\theta) \quad ,$$

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left(k^2 + \frac{\chi}{r^2} \right) R(r) = 0.$$

A partir da relação de dispersão $kc = \omega$, porém usando exponenciais complexas no lugar da eq.(6), as soluções da equação temporal serão dadas por:

$$T(t) = e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}. \quad (15)$$

Na equação em $\Theta(\theta)$, χ é o autovalor que está associado às oscilações angulares da solução, o argumento de periodicidade da função angular exige que $\chi = -m^2$, com $m = 0, 1, 2, \dots$, o qual será responsável pelo número de nós angulares na membrana. Para cada valor de m a solução é:

$$\Theta_m(\theta) = A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta). \quad (16)$$

Em termos das quantidades definidas anteriormente a equação radial fica

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (17)$$

Sendo esta a equação de Bessel, que admite soluções da forma:

$$R(r) = C_m J_m(kr) + C'_m N_m(kr) \quad (18)$$

sendo $J_m(kr)$ a função de Bessel de ordem m e $N_m(kr)$ a função de Neumann de ordem m . Como as funções de Neumann apresentam comportamento irregular na origem, elas devem ser descartadas.

Para os autovalores do problema temos $k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}$, onde α_{mn} são raízes da função de Bessel, o que garante que sempre teremos $u(r = a, \theta, t) = 0$, que é a condição da membrana estar engastada. Escrevendo a solução como uma soma dupla, em m e n , e usando a condição de que a solução deve ser real, temos que ter a combinação das exponenciais complexo conjugadas $e^{i\omega t}$ e $e^{-i\omega t}$, bem como os coeficientes da soma. Assim tem-se:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) \times \quad (19)$$

$$[(A_{mn} e^{i\omega_{mn} t} + \bar{A}_{mn} e^{-i\omega_{mn} t}) \cos m\theta + (B_{mn} e^{i\omega_{mn} t} + \bar{B}_{mn} e^{-i\omega_{mn} t}) \sin m\theta]$$

Os coeficientes A_{mn} e B_{mn} são determinados com o auxílio das condições iniciais

$$u(r, \theta, t = t_0) = u_0(r, \theta),$$

$$\dot{u}(r, \theta, t = t_0) = v_0(r, \theta).$$

Para $t = 0$ a solução fica

$$u(r, \theta, t = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) \times \quad (20)$$

$$[(A_{mn} + \bar{A}_{mn}) \cos m\theta + (B_{mn} + \bar{B}_{mn}) \sin m\theta].$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por

$$r J_m\left(\alpha_{m'n'} \frac{r}{a}\right) \cos m'\theta \quad (21)$$

e integrando em relação a r no intervalo 0 a a e em θ de 0 a 2π e valendo-se das relações de ortogonalidade das funções trigonométricas e da função de Bessel teremos que $m = m'$ e $n = n'$ restam após a integração. Assim

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} u_0(r, \theta) \cos(m\theta) r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) dr d\theta = \quad (22)$$

$$\frac{\pi a^2}{2} [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2 (A_{mn} + \bar{A}_{mn}), \quad m \neq 0$$

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} u_0(r, \theta) \cos(m\theta) r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) dr d\theta = \quad (23)$$

$$\pi a^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2 (A_{mn} + \bar{A}_{mn}), \quad m = 0.$$

Da segunda condição, por meio da diferenciação em relação a t , obtemos

$$v(r, \theta, t = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) \times \quad (24)$$

$$i\omega_{mn} [(A_{mn} - \bar{A}_{mn}) \cos m\theta + (B_{mn} - \bar{B}_{mn}) \sin m\theta]$$

de maneira inteiramente análoga a anterior temos que

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} v_0(r, \theta) \cos(m\theta) r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) dr d\theta = \quad (25)$$

$$i \frac{\pi a^2}{2} \omega_{mn} [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2 (A_{mn} - \bar{A}_{mn}), \quad m \neq 0$$

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} v_0(r, \theta) \cos(m\theta) r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) dr d\theta = \quad (26)$$

$$i \pi a^2 \omega_{mn} [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2 (A_{mn} - \bar{A}_{mn}), \quad m = 0$$

Para o cálculo dos coeficientes B_{mn} e \bar{B}_{mn} os mesmos passos são seguidos atentando para o fato de que a integração de $\sin^2 m\theta$ possui valor nulo quando $m = 0$. Os coeficientes são:

$$A_{mn} = \frac{1}{\pi a^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[u_0(r, \theta) - \frac{iv_0(r, \theta)}{\omega_{mn}} \right] \times \cos(m\theta) r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) dr d\theta, \quad m \neq 0 \quad (27)$$

$$A_{0n} = \frac{1}{2\pi a^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[u_0(r, \theta) - \frac{iv_0(r, \theta)}{\omega_{mn}} \right] \times r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) dr d\theta, \quad m = 0 \quad (28)$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\pi a^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[u_0(r, \theta) - \frac{iv_0(r, \theta)}{\omega_{mn}} \right] \times \sin(m\theta) r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) dr d\theta \quad (29)$$

As funções de Bessel irão contribuir com as linhas nodais radiais, e as funções trigonométricas contribuirão com as linhas nodais angulares, como mostrado na figura 2.

5. BARRAS

Um caso interessante ocorre quando em uma membrana uma dimensão é muito maior que outra e existe apenas a possibilidade de oscilação ao longo da coordenada da maior dimensão, isto é conhecido como barra. Nos instrumentos as barras são excitadas através da batida de uma baqueta ou martelo.

A formulação associada a este problema difere significativamente da formulação da membrana, uma vez que

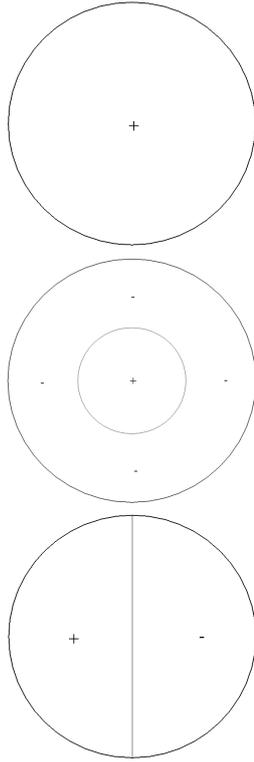


Figura 2: Superior: primeiro modo normal, correspondente a $n = 1, m = 0$. Meio: modo normal correspondente a $n = 2, m = 0$. Inferior: modo normal correspondente a $n = 1, m = 1$. As linhas e círculos representam regiões nodais destes modos, os sinais + e - indicam que regiões adjuntas se movem em antifase. O número n está associado aos nós radiais, enquanto o número m está associado aos nós angulares.

a equação diferencial associada [17] é agora de quarta ordem na derivada espacial, sendo esta conhecida também como equação da viga.

Vários instrumentos musicais utilizam-se de barras em seu mecanismo gerador de som, entre estes podemos citar diretamente o xilofone e a marimba, nos quais barras de metal, madeira ou outro material sintético são percutidas com baquetas.

No caso da celesta, isto não é tão imediato uma vez que o mecanismo composto de um martelo, semelhante ao do piano, o qual colide com uma barra metálica encontra-se oculto no interior do instrumento.

Esses sistemas de barras são regidos pela seguinte equação diferencial, cuja solução é feita em detalhes em [18]

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} + \frac{EK^2}{\rho} \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} = 0. \quad (30)$$

em que $f(x, t)$ é o deslocamento da posição de equilíbrio, E é o módulo de Young, ρ é a densidade do material e K é o raio de giração da barra.

A separação desta equação resulta para a parte temporal na eq.(4), com uma solução dada pela eq.(6).

Para parte espacial resulta

$$\frac{d^4 F(x)}{dx^4} - \frac{\omega^2 \rho}{EK^2} F(x) = 0. \quad (31)$$

Usando a relação de dispersão, obtida em [17], onde v é a velocidade de propagação do som na barra,

$$v^2 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} K \omega$$

é possível reescrever a equação espacial da seguinte forma

$$\frac{d^4 F(x)}{dx^4} - \frac{\omega^4}{v^4} F(x) = 0 \quad (32)$$

Para a qual supõe-se como solução $F(x) = Ae^{\gamma x}$, visando determinar γ , cujas raízes corresponderão aos possíveis números de onda permitidos, assim obtém-se

$$\gamma^4 = \frac{\omega^4}{v^4}$$

donde γ assume os seguintes valores

$$\gamma = \pm \frac{\omega}{v} \quad \text{ou} \quad \gamma = \pm \frac{\omega}{v} i$$

sendo i a unidade imaginária.

A solução geral é o produto da parte temporal pelas quatro exponenciais correspondentes a cada valor de γ .

$$f(x, t) = \cos(\omega t + \phi) [\tilde{A}e^{\omega x/v} + \tilde{B}e^{-\omega x/v} + \tilde{C}e^{i\omega x/v} + \tilde{D}e^{-i\omega x/v}].$$

Usando as propriedades das exponenciais complexas e reais,

$$e^{\pm x} = \cosh(x) \pm \sinh(x), \\ e^{i\pm x} = \cos(x) \pm i \sin(x),$$

e definindo o número de onda $k = \frac{\omega}{v}$, é possível reescrever uma solução real em termos de novas constantes

$$f(x, t) = \cos(\omega t + \phi) [A(\cos kx + \cosh kx) + B(\cos kx - \cosh kx) + C(\sin kx + \sinh kx) + D(\sin kx - \sinh kx)], \quad (33)$$

As barras de comprimento L geralmente aparecem nos instrumentos com suas extremidades livres, como no caso da celesta. Impondo as condições de contorno [19] sobre a parte espacial na extremidade $x = 0$ da eq.(33), obtém-se de

$$\left(\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0,$$

que $B = 0$.
E de

$$\left(\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3}\right)_{x=0} = 0,$$

obtém-se $D = 0$. Em $x = L$ para as mesmas condições

$$\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right)_{x=L} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3}\right)_{x=L} = 0,$$

obtém-se o sistema:

$$\begin{aligned} A(-\cos kL + \cosh kL) + C(-\sin kL + \sinh kL) &= 0, \\ A(\sin kL + \sinh kL) + C(-\cos kL + \cosh kL) &= 0, \end{aligned}$$

o qual só possui soluções não triviais quando

$$\cosh kL \cos kL = 1. \tag{34}$$

Introduzindo a variável adimensional $\kappa = kL$, as soluções podem ser obtidas numericamente, sendo algumas delas $\kappa = 4.73, 7.85, 10.99$. Portanto, vê-se que as frequências dos modos normais da barra não seguem uma relação de múltiplos inteiros de uma frequência fundamental uma vez que k e f estão relacionados através de ω .

A solução geral é uma soma apropriada, sobre as raízes da eq.(34), tal que:

$$f(x,t) = \sum_k \cos(\omega_k t + \phi_k) [A_k(\cos kx + \cosh kx) + B_k(\sin kx + \sinh kx)]. \tag{35}$$

Um tratamento para outras condições de contorno, como a do xilofone, onde a barra é livre nas extremidades, porém possui dois pontos onde está fixada pode ser encontrado em [19].

6. TUBOS

Nesta seção são tratados os tubos e o ar contido em seus interiores. Pretende-se descrever a evolução temporal das ondas de pressão que ocorrem no ar contido em um tubo. Nesta classe temos instrumentos musicais que se utilizam de tubos abertos em ambas as extremidades, como a flauta transversal, onde o ar no interior do tubo é excitado através de um jato de ar proporcionado pelo músico. Outros instrumentos consistem de tubos fechados em uma extremidade e abertos em outra, como o clarinete, no qual a vibração de uma palheta perturba o ar no interior do tubo. Além distes existem alguns tubos de órgão que são fechados em ambas as extremidades. Os instrumentos conhecidos como metais, o trompete, a

trompa e etc, possuem como mecanismo de perturbação a vibração dos lábios do instrumentista.

A condição de contorno [2] para uma extremidade aberta é que a pressão seja igual a pressão atmosférica local, $P = P_0$. Para a extremidade fechada a pressão deve ser um extremo, tal que $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$.

A equação diferencial que rege a variação da pressão, $p(x,t)$, no interior do tubo é

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}, \tag{36}$$

sua separação usando $p(x,t) = P_0 + P(x)T(t)$, resulta na eq.(3) e, em

$$\frac{d^2 P(x)}{dx^2} + k^2 P(x) = 0,$$

Tabela I: Restrições associadas ao número de onda k , a frequência f e ao comprimento de onda λ devido as condições de contorno, para cada tipo de tubo estudado. Sendo L o comprimento do tubo, c a velocidade de propagação do som no ar e, n um número inteiro positivo.

Tipo de tubo	k (m^{-1})	f (Hz)	λ (m)
Aberto-Aberto	$\frac{n\pi}{L}$	$\frac{nc}{2L}$	$\frac{2L}{n}$
Aberto-Fechado	$\frac{(2n+1)\pi}{2L}$	$\frac{(2n+1)c}{4L}$	$\frac{4L}{2n+1}$
Fechado-Fechado	$\frac{n\pi}{L}$	$\frac{nc}{2L}$	$\frac{2L}{n}$

cuja solução da forma da eq.(4) deve satisfazer as condições de contorno do tipo de tubo em questão.

i) Tubo de comprimento L abertos em ambas as extremidades: deve-se verificar $P(x=0) = P(x=L) = P_0$, o que leva a $A = 0$ e $B \sin kL = 0$. A condição de não trivialidade da solução exige a igualdade $k = \frac{n\pi}{L}$. Assim a solução é a pressão atmosférica acrescida de um combinação linear apropriada de pequenas variações da pressão

$$p(x,t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega_n t + \phi_n). \tag{37}$$

ii) Tubo de comprimento L fechado em $x = 0$ e aberto em $x = L$: deve-se verificar

$$\left(\frac{\partial P(x)}{\partial x}\right)_{x=0} = 0,$$

e $P(x=L) = P_0$. Da primeira condição obtém-se $B = 0$ e, da segunda $A \cos(kx) = 0$, o que restringe $k = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$ para que a solução não seja trivial. O mesmo argumento do caso (*i*) leva à seguinte solução geral

$$p(x,t) = P_0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right] \cos(\omega_n t + \phi_n). \tag{38}$$

iii) Tubo de comprimento L fechado em ambas as extremidades: deve-se verificar

$$\left(\frac{\partial P(x)}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial P(x)}{\partial x}\right)_{x=L} = 0.$$

Da primeira condição resulta $A = 0$ e da segunda condição resulta $-Ck \sin kL = 0$, o que restringe $k = \frac{n\pi}{L}$ para que a solução seja não trivial. Como nos casos anteriores a solução geral é dada por:

$$p(x, t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega_n t + \phi_n). \quad (39)$$

As restrições em k devido as condições de contorno, bem como as frequências correspondentes e os respectivos comprimentos de onda são mostrados na tabela 1, o comportamento espacial da pressão é mostrado na figura 3. Os coeficientes C_n das equações (37), (38) e (39) determinam a intensidade associada a cada harmônico e os ϕ_n correspondem as respectivas fases.

Estes resultados podem ser tornados mais realistas quando se examina o caso de um tubo de comprimento L com um furo a uma distância d de sua extremidade, figura 4. Quando a dimensão do raio do furo é muito menor que o comprimento do tubo, ocorre uma redução do tamanho efetivo do tubo, o qual passa para $L' = L - d$. Sendo o tubo ser aberto em ambas as extremidades, este modelo pode representar uma flauta, e quando uma extremidade é fechada e outra aberta, este modelo pode representar um clarinete.

No caso da flauta, substituindo L por $L - d$ na eq.(37), a solução passa a ser

$$p(x, t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left[\frac{n\pi}{(L-d)}x\right] \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (40)$$

e agora existe um nó em $x = (L - d)$, sendo as frequências possíveis $f = \frac{nc}{2(L-d)}$.

No caso do clarinete, substituindo L por $L - d$ na eq.(38), a solução passa a ser

$$p(x, t) = P_0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2(L-d)}x\right] \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (41)$$

e o nó passa a existir em $x = (L - d)$, e as frequências possíveis passam a ser $f = \frac{(2n+1)c}{4(L-d)}$.

Para ambos os casos quando $d = L/2$ a frequência do primeiro harmônico, $n = 1$, passa a ser o dobro da frequência do primeiro harmônico de um tubo de comprimento L . Isso indica que um tubo com um furo exatamente no meio é equivalente a um tubo de comprimento $L/2$.

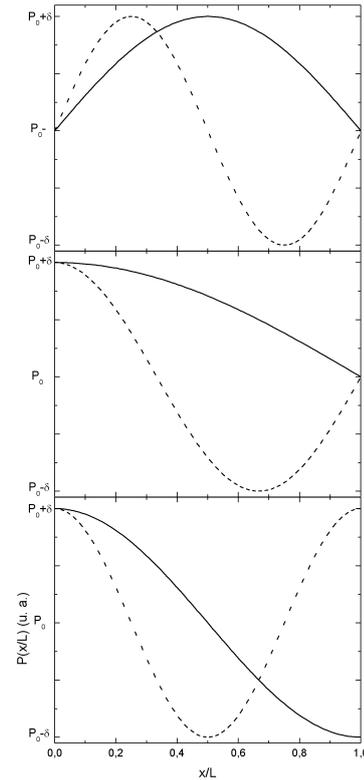


Figura 3: Superior: Pressão no interior de um tubo aberto em ambas as extremidades como função de x/L , primeiro modo normal linha cheia, segundo modo normal linha pontilhada, sendo P_0 a pressão atmosférica e δ o valor máximo do deslocamento da pressão em torno de P_0 . Meio: idem a figura superior para o tubo fechado em $x = 0$ e aberto em $x = L$. Inferior: idem superior para o tubo fechado em ambas as extremidades.

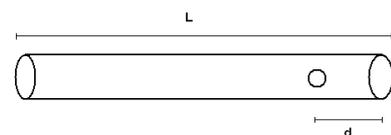


Figura 4: Representação esquemática de um tubo de comprimento L com um furo a uma distância d de uma extremidade. Se este for aberto em ambas as extremidades pode ser usado como o modelo para uma flauta, se for fechado em uma extremidade e aberto em outra, pode ser usado como modelo para um clarinete.

7. CONCLUSÃO

Embora amplamente conhecidas no meio acadêmico, as equações diferenciais aqui utilizadas se prestam à descrição de fenômenos físicos que rara-

mente são expostos em sala em um curso de graduação em Física, ficando restritas àqueles que estudam acústica de forma sistemática. Contudo mostramos que a exposição de problemas básicos relacionados à acústica de instrumentos musicais se faz de forma simples uma vez sendo o leitor familiarizado com equações diferenciais. Desta forma pretendeu-se introduzir o assunto de maneira não trivial, tampouco excessivamente especializada proporcionando ao leitor interessado bases para estudos mais aprofundados.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Dr. Adriana do R. Lopes e ao Dr. Aloísio L. Schmidt pelo incentivo. Agradecemos também aos professores Evaldo Ribeiro e Sérgio L. M. Berleze pelas discussões, sugestões e materiais.

-
- [1] R. Resnick, D. Halliday, Oscilações. In: R. Resnick, D. Halliday, Física 2, 3ª ed., Editora LTC, Rio de Janeiro, 1982, Cap. 15.
- [2] I. A. Hümmelgen, Cad. Cat. Ens. Fís. **13**, 139 (1996). Eur. J. Phys. **16** 187 (1995).
- [3] J. P. Donoso, A. Tannús, F. Guimarães, T. C. de Freitas, Rev. Bras. Ens. Fís. **30**, 2305 (2008).
- [4] X. Boutillon, Mec. Ind. **1**, 609 (2000).
- [5] J. Woodhouse, A. R. Loach, Acustica-Acta Acustica **85**, 734 (1999).
- [6] C. Gough, Eur. Phys. J. Special Topics **145**, 77 (2007).
- [7] J. E. McLennan, Acustica-Acta Acustica, **89**, 176 (2003).
- [8] A. Matsutani, Jpn. J. Appl. Phys. **41**, 1618 (2002).
- [9] E. Jansson, Acoustics for Violin and Guitar Makers (KTH Institute, Sweeden 2002), 4th ed. Disponível em <http://www.speech.kth.se/publications>.
- [10] L. L. Henrique, Acústica Musical, 1ª ed., Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2002.
- [11] J. Jeans, Science and Music, 1st ed., Dover Publications, New York, 1968.
- [12] H. F. Olson, Music, Physics and Engineering, 2nd ed., Dover Publications, Mineola, 1967.
- [13] Disponível em: <http://audacity.sourceforge.net/>.
- [14] V. Välimäki, I. Huopaniemi, M. Karjalainen, Z. Janosy, J. Audio Eng. Soc. **44**, 331 (1996).
- [15] Ver: <http://nusofting.liqih.synth.com/acousticmodels.html>, <http://ccrma.stanford.edu/jos/pubs.html>
- [16] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, Higher Order Linear Equations. In: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 7th ed., John Wiley and Sons, New York, 2001, Cap. 4.
- [17] D. E. Hall, Transverse Waves on a String, Waves: Further Examples. In: Basic Acoustics, 1st ed., John Wiley and Sons, New York, 1987, Cap. 7 e 8.
- [18] E. Butkov, Funções Especiais. In: E. Butkov, Física Matemática, 1ª ed., Editora LTC, Rio de Janeiro, 1988, Cap. 9.
- [19] J. W. S. Rayleigh, The Theory of Sound, 2nd ed., Dover Publications, New York, 1945.