Physicæ

O teleparalelismo equivalente à relatividade geral e o momento angular gravitacional

S. C. Ulhoa[1, *]

[1] *Centro Internacional de Física da Matéria Condensada, Universidade de Brasilia, 70910-900, Brasilia, DF, Brazil*

O problema do momento angular gravitacional é analisado no contexto do teleparalelismo equivalente à relatividade geral (TEGR na sigla em inglês). Utilizando-se o formalismo Hamiltoniano, encontra-se o momento angular de uma configuração arbitrária com simetria axial, quando aplicado a uma estrela de nêutrons, tem-se que o resultado é proporcional ao próprio momento angular da fonte. O TEGR é descrito em detalhes, no qual se define energia, momento e momento angular gravitacionais. O campo de tétradas, que são as variáveis dinâmicas da teoria, tem sua interpretação associada a um observador no espaço-tempo.

PACS: 04.20.Cv, 04.20.Fy, 04.30.-w
Palavras chaves: Teleparalelismo; Momento angular gravitacional; Tétradas.

1. INTRODUÇÃO

Um entendimento mais completo e profundo da relatividade geral de Einstein requer o conhecimento da estrutura das equações de campo, soluções e suas consequências, bem como a compreensão de propriedades tais como: a energia, momento e momento angular do campo gravitacional [1, 2]. Devido ao surgimento de problemas na interpretação, e mesmo na definição dessas propriedades, que são indispensáveis para a completa compreensão da teoria, torna-se necessária uma nova abordagem, porém equivalente, para a descrição do campo gravitacional.

Na abordagem geométrica da gravitação surgem diversos problemas conceituais tais como a dificuldade em se definir uma expressão para a densidade energia gravitacional que seja independente de coordenadas, além disso, existem sérias dificuldades quando tentamos construir uma teoria de calibre na tentativa de se unificar as quatro interações fundamentais da natureza. Parte dessa dificuldade advém de extensões equivocadas do Princípio da Equivalência. Outro ponto capital é que na formulação geométrica da relatividade geral têm-se várias maneiras para se definir energia-momento e momento angular [3–7], mas todas apresentam-se insatisfatórias.

Moller [8] já havia notado que é impossível anular o campo gravitacional por uma simples transformação de coordenadas, ou seja, as quantidades físicas têm que ser independentes de tais transformações. Por isso a abordagem de pseudo-tensores torna-se inviável, uma vez que em sua formulação, essa dependência é explícita. Um outro problema é que a interação gravitacional é muito fraca em comparação com as outras interações fundamentais, caracterizando a chamada "hierarquia das interações".

Assim, temos que abordar a gravitação sob um outro ponto de vista que nos permita resolver alguns dos problemas citados e que recupere os ganhos e conquistas da visão geométrica. Isso é feito através do chamado teleparalelismo equivalente à relatividade geral (TEGR).

Este trabalho se propõe a descrever sistematicamente o teleparalelismo de modo que possa servir como uma revisão do que se tem até então sobre o assunto, dando-se ênfase ao seu desenvolvimento mais recente, ou seja, na definição da expressão para o momento angular gravitacional, no contexto do formalismo Hamiltoniano, e aplicação de tal expressão para uma configuração arbitrária com simetria axial.

Este artigo está dividido da seguinte forma: na seção II as propriedade básicas de um campo de tétradas são apresentadas e como construir tais objetos no caso de um espaço-tempo na presença de um campo gravitacional. Na seção III é introduzida a formulação lagrangeana do teleparalelismo. Na seção IV é discutido como construir a formulação Hamiltoniana e define-se as quantidades energia-momento e momento angular a partir dos vínculos da teoria. O significado físico do campo de tétradas é interpretado na seção V. Na seção VI as expressões para o momento angular gravitacional são aplicadas para uma simetria axial e finalmente na seção VII as conclusões finais são apresentadas.

Notação:
Índices de espaço-tempo $\mu, \nu, ...$ e índices SO(3,1) $a, b, ...$ variam de 0 a 3. Índices de espaço e tempo são indicados de acordo com $\mu = 0, i, \;\; a = (0), (i)$. O campo de tétradas é denotado por $e^a{}_\mu$, o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski levanta e abaixa índices e é fixado por $\eta_{ab} = e_{a\mu} e_{b\nu} g^{\mu\nu} = (-+++)$. O determinante do campo de tétradas é indicado por $e = \det(e^a{}_\mu)$. As unidades são fixadas com a escolha $G = c = 1$, a menos que se diga o contrário.

2. PROPRIEDADES BÁSICAS DO CAMPO DE TÉTRADAS

Um campo de tétradas é um conjunto de vetores linearmente independentes que obedecem uma relação de ortogonalidade. Esses vetores são usados para construir uma base capaz de descrever um espaço-tempo. As

*sergio@fis.unb.br

primeiras tentativas de se descrever o campo gravitacional por meio de tétradas são atribuídas a Einstein na tentativa de se unir a gravitação e o eletromagnetismo [9]. A característica mais importante das tétradas é que, na descrição do espaço-tempo em termos destes campos, o Princípio da Equivalência surge de maneira natural. Isso se deve ao fato de que os campos de tétradas, que descrevem ao mesmo tempo o espaço-tempo físico e o espaço tangente, podem ser interpretados como uma transformação de Lorentz entre os diferenciais dx^μ do espaço-tempo físico e dq^a do espaço-tempo tangente, através da comparação entre $\Lambda^c{}_a\Lambda^d{}_b\eta_{cd}=\eta_{ab}$, onde $\Lambda^a{}_b$ é a matriz de Lorentz, e $e^a{}_\mu e^b{}_\nu\eta_{ab}=g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo físico. Com isso podemos sempre escrever a quantidade projetada $e^a=e^a{}_\mu dx^\mu$, porém podemos escrever também $dq^a=e^a{}_\mu dx^\mu$, muito embora não possamos integrar esta relação e escrever $q^a=q^a(x^\mu)$.

Em um espaço-tempo físico arbitrário há sempre um espaço-tempo plano tangente em cada ponto. O espaço-tempo físico será designado por letras gregas, de forma similar o espaço-tempo tangente será designado por letras latinas. Podemos projetar uma quantidade definida nesse espaço-tempo arbitrário, no espaço-tempo tangente. Para isso, usamos o campo de tétradas. Considere um vetor definido em um espaço-tempo V^μ, a correspondente projeção no espaço-tempo tangente é dada por

$$V^a=e^a{}_\mu V^\mu\,, \tag{1}$$

sendo que para isso utilizamos o campo de tétradas $e^a{}_\mu$. Da mesma forma é possível projetar um vetor do espaço-tempo tangente V^a no espaço-tempo físico,

$$V^\mu=e_a{}^\mu V^a\,, \tag{2}$$

usando o campo de tétradas inverso $e_a{}^\mu$. As quantidades cujas componentes possuem índices do espaço-tempo físico se comportam como tensores sob transformações de coordenadas, enquanto aquelas cujas componentes possuem índices do espaço-tempo tangente são invariantes por transformações de Lorentz. A relação de ortogonalidade entre as tétradas pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= e^{a\mu}e_a{}^\nu\,;\\ \eta^{ab} &= e^{a\mu}e^b{}_\mu\,. \end{aligned} \tag{3}$$

A seguir será discutido como construir um campo de tétradas em um espaço-tempo plano, claro que neste caso o espaço-tempo tangente será o próprio espaço-tempo físico. Para isso vamos considerar dois sistemas de coordenadas, $q^a=(t,x,y,z)$ no espaço-tempo tangente e $x^\mu=(t,r,\theta,\phi)$ no espaço-tempo físico. Os dois sistemas estão relacionados pela transformação de coordenadas $dq^a=e^a{}_\mu dx^\mu$, com isso o campo de tétradas pode ser escrito como

$$e^a{}_\mu=\frac{\partial q^a}{\partial x^\mu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\sin\theta\cos\phi&r\cos\theta\cos\phi&-r\sin\theta\sin\phi\\0&\sin\theta\sin\phi&r\cos\theta\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi\\0&\cos\theta&-r\sin\theta&0\end{pmatrix}\,, \tag{4}$$

da relação acima percebemos que o campo de tétradas pode ser escrito como o gradiente da função q^a. Quando isso ocorre a tétrada é chamada de holonômica, nesse caso tanto x^μ quanto q^a descrevem os mesmos pontos do espaço-tempo, como seria de se esperar em uma transformação de cordenadas. A mesma idéia pode ser usada para construírmos outras configurações de tétradas, por exemplo através de uma transformação de coordenadas que se relacionam através de um "boost"de Lorentz. Por isso é importante frisar que a forma de se escrever o campo de tétradas em (4) é uma das muitas maneiras de se escrevê-lo. Entretanto esta forma será preferida uma vez que coordenadas esféricas serão melhor adaptadas na descrição dos sistemas abordados.

No caso geral o campo de tétradas não pode ser escrito na forma $\partial_\mu q^a$, então a tétrada é chamada de não-holônoma. Para essa categoria de transformações temos a seguinte propriedade $\partial_\mu e^a{}_\nu-\partial_\nu e^a{}_\mu\neq 0$, logo para um espaço-tempo com torção, temos tétradas que obedecem a condição de não-holonomicidade.

3. FORMULAÇÃO LAGRANGEANA

Exigiremos inicialmente que a teoria exiba invariância local de Lorentz, através da introdução de uma conexão de spin $\omega_{\mu ab}$ do grupo SO(3,1) local, e posteriormente vamos impor que essa conexão seja nula para obtermos uma densidade de Lagrangeana invariante por transformações globais de Lorentz [10]. As equações de campo serão obtidas a partir dessa densidade de Lagrangeana.

Quando introduzimos a conexão de spin a condição de teleparalelismo exige que a derivada covariante da tétrada seja nula, o que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \nabla_\mu e^a{}_\nu &= 0\\ \partial_\mu e^a{}_\nu-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}e^a{}_\lambda+\omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu &= 0\,, \end{aligned} \tag{5}$$

Isolando a conexão $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ na última equação temos

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=e^{a\lambda}e^b{}_\nu\omega_{\mu ab}+e^{a\lambda}\partial_\mu e_{a\nu}\,. \tag{6}$$

Substituindo essa quantidade na definição usual do tensor de curvatura obtemos

$$\begin{aligned} R^\lambda{}_{\gamma\mu\nu}(\Gamma) &= R^\lambda{}_{\gamma\mu\nu}(e\,,\omega)=e_a{}^\lambda e^b{}_\gamma(\partial_\mu\omega_\nu{}^a{}_b-\partial_\nu\omega_\mu{}^a{}_b+\\ &+\ \omega_\mu{}^a{}_c\omega_\nu{}^c{}_b-\omega_\nu{}^a{}_c\omega_\mu{}^c{}_b)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Devemos notar que os termos envolvendo $\partial_\mu e_{a\nu}$ se cancelam de modo que temos a relação $R^\lambda{}_{\gamma\mu\nu}(\Gamma)=$

$e_a{}^{\lambda} e^b{}_{\gamma} R^a{}_{b\mu\nu}(\omega)$. Usando a equação (6), podemos calcular o tensor de torção $T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$, que gera a seguinte expressão

$$T^a{}_{\mu\nu}(e,\omega) = \partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu + \omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu - \omega_\nu{}^a{}_b e^b{}_\mu \,. \quad (8)$$

A conexão de spin, usando a equação (8), pode ser escrita identicamente como

$$\omega_{\mu ab} = {}^\circ\omega_{\mu ab} + K_{\mu ab}\,, \quad (9)$$

onde $K_{\mu ab}$ é o tensor de contorção e ${}^\circ\omega_{\mu ab}$ é a conexão de Levi-Civita, sendo essas quantidades definidas pelas expressões

$$\begin{aligned} K_{\mu ab} &= \frac{1}{2} e_a{}^{\lambda} e_b{}^{\nu} (T_{\lambda\mu\nu} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu})\,, \\ {}^\circ\omega_{\mu ab} &= -\frac{1}{2} e^c{}_\mu (\Omega_{abc} - \Omega_{bac} - \Omega_{cab})\,, \end{aligned} \quad (10)$$

com Ω_{abc} dado por

$$\Omega_{abc} = e_{a\nu}(e_b{}^{\mu}\partial_\mu e_c{}^{\nu} - e_c{}^{\mu}\partial_\mu e_b{}^{\nu})\,. \quad (11)$$

Devemos notar que ${}^\circ\omega_{\mu ab}$ possui torção nula.

Se usarmos a expressão (9) para calcular o escalar de curvatura, que é calculado por meio da contração dos índices do tensor definido em (7), chegamos à seguinte relação

$$\begin{aligned} eR(e,\omega) &= eR(e) + e\left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^aT_a\right) - \\ &- 2\partial_\mu(eT^\mu)\,. \end{aligned} \quad (12)$$

Essa é a relação fundamental que será usada para definirmos a densidade de Lagrangeana no TEGR.

Na formulação Lagrangeana do TEGR vamos impor que a conexão de spin $\omega_{\mu ab}$ seja igual a zero. Com isso o escalar de curvatura, obtido por contração dos índices do tensor em (7), torna-se nulo e a expressão (12) se reduz a

$$eR(e) \equiv -e\left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^aT_a\right) + 2\partial_\mu(eT^\mu)\,. \quad (13)$$

Além disso, a torção em (8) assume a seguinte forma

$$T^a{}_{\mu\nu}(e) = \partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu\,. \quad (14)$$

Se desprezarmos a divergência em (13), a densidade de Lagrangeana para o campo gravitacional no TEGR é dada por

$$\begin{aligned} L(e_{a\mu}) &= -k\,e\left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^aT_a\right) - L_M \\ &\equiv -k\,e\Sigma^{abc}T_{abc} - L_M\,, \end{aligned} \quad (15)$$

onde $k = 1/(16\pi)$ e L_M é a densidade de Lagrangeana para os campos de matéria. O termo de divergência não é necessário quando construímos a integral de ação para espaços-tempos assintoticamente planos, pois as integrais de superfície que surgem por integrações por partes se anulam. No vácuo, notamos que a densidade de Lagrangeana é invariante por transformações gerais de coordenadas e por transformações de Lorentz globais SO(3,1) como é esperado, uma vez que impusemos $\omega_{\mu ab} = 0$. O tensor Σ^{abc} é definido por

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c)\,, \quad (16)$$

e $T^a = T^b{}_b{}^a$. As equações de campo são obtidas a partir de (15), por meio de sua variação funcional em relação a $e^{a\mu}$ e são dadas por

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e\left(\Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd}\right) = \frac{1}{4k}eT_{a\mu}\,. \quad (17)$$

Como $\Sigma^{abc}T_{abc}$ é proporcional ao escalar de curvatura a menos de uma divergência total, pode-se mostrar, por cálculos explícitos, que o lado esquerdo de (17) é proporcional ao tensor de Einstein $G_{a\mu} = e_a{}^{\nu}G_{\nu\mu}$. Ou seja

$$\begin{aligned} &e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e\left(\Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd}\right) = \\ &\frac{1}{2}e[R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2}e_{a\mu}R(e)]\,, \end{aligned} \quad (18)$$

com isso, a seguinte equação se torna clara

$$R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2}e_{a\mu}R(e) = \frac{1}{2k}T_{a\mu}\,. \quad (19)$$

Isso mostra a equivalência entre a teoria em questão e a relatividade geral, o que justifica o próprio nome da teoria. Essa equivalência pode ser visualizada quando analisamos a maneira como a relatividade geral é descrita. Usualmente ela é descrita em termos de um tensor de curvatura diferente de zero, é portanto uma teoria essencialmente geométrica, e com o tensor de torção nulo. Para o teleparalelismo o quadro é oposto, mas absolutamente equivalente. Tem-se a curvatura construída a partir da conexão de Cartan nula e a torção diferente de zero.

As equações de campo (17) podem ser reescritas na forma

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\lambda\nu}) = \frac{1}{4k}e\,e^a{}_\mu(t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu})\,, \quad (20)$$

onde

$$t^{\lambda\mu} = k(4\Sigma^{bc\lambda}T_{bc}{}^{\mu} - g^{\lambda\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd})\,, \qquad (21)$$

é interpretado como o tensor de energia momento do campo gravitacional [11]. Dentre os vários motivos que suportam essa interpretação [12], vemos primeiramente que $t^{\lambda\mu}$ é um tensor verdadeiro sob transformações de coordenadas, entretanto $t^{\lambda\mu}$ não é simétrico. Além disso, temos uma lei de conservação tanto para $et^{a\lambda}$ quanto para $eT^{a\lambda}$. Para entendermos isso basta notar que $\Sigma^{a\lambda\nu}$ é anti-simétrico nos dois últimos índices, lembrando que uma contração entre um tensor simétrico e outro anti-simétrico é nula, temos o seguinte

$$\partial_\lambda\partial_\nu(e\Sigma^{a\lambda\nu}) \equiv 0\,. \qquad (22)$$

Assim, imediatamente chegamos à equação:

$$\partial_\lambda(et^{a\lambda} + eT^{a\lambda}) = 0\,, \qquad (23)$$

que é uma lei de conservação local para os tensores de energia-momento gravitacional, $t^{a\lambda}$, e dos campos de matéria, $T^{a\lambda}$.

4. FORMULAÇÃO HAMILTONIANA

Nesta seção faremos uma apresentação resumida dos resultados principais estabelecidos nas referências [13] e [2]. Para obtermos a formulação Hamiltoniana do TEGR temos que, primeiramente, estabelecer o espaço de fase da teoria. Como a densidade de Lagrangeana não contém explicitamente a derivada temporal de e_{a0}, essa quantidade surge como um multiplicador de Lagrange. O momento canonicamente conjugado a e_{ai} é dado por $\Pi^{ai} = \delta L/\delta\dot{e}_{ai}$. A formulação Hamiltoniana (não explicitamente covariante) é obtida reescrevendo a densidade de Lagrangeana na forma $L = p\dot{q} - H_0$, em termos de e_{ai}, Π^{ai} e dos multiplicadores de Lagrange. Executando a transformação de Legendre, chegamos à densidade de Hamiltoniana [2] na forma

$$H = e_{a0}C^a + \frac{1}{2}\lambda_{ab}\Gamma^{ab}\,, \qquad (24)$$

onde $\lambda_{ab} = -\lambda_{ba}$ são multiplicadores de Lagrange. Após resolvermos as equações de campo identificamos os multiplicadores de Lagrange como $\lambda_{ik} = 1/2(T_{i0k} + T_{k0i})$ e $\lambda_{0k} = -\lambda_{k0} = T_{00k}$. Garantimos que a evolução temporal de qualquer quantidade é bem definida neste formalismo quando verificamos que os vínculos C^a e Γ^{ab} são de primeira classe [13].

O vínculo C^a é escrito como $C^a = -\partial_i\Pi^{ai} + h^a$, onde h^a é uma expressão muito complicada das variáveis de campo, entretanto não é necessário explicitar esta expressão para interpretarmos o vínculo C^a como definição de energia-momento, seguindo o que feito no formalismo Hamiltoniano de ADM [14]. Entretanto temos que frisar que a divergência em C^a é usada para definirmos o momento energia, tendo por base a estrutura das equações de campo. Assim a forma integral das equações de vínculo $C^a = 0$ é interpretada como equação de energia do tipo $H - E = 0$ e nos permite definir o vetor energia-momento gravitacional P^a

$$P^a = -\int_V d^3x\partial_i\Pi^{ai}\,, \qquad (25)$$

V é um volume arbitrário do espaço tri-dimensional. Essa é uma definição consistente pois diversas aplicações indicam que (25) representa a energia-momento gravitacional contido em um volume V em espaços vazios. Particularmente (25) gera a energia de ADM [14] quando aplicada a todo espaço tri-dimensional. No espaço de configurações, temos:

$$\Pi^{ai} = -4ke\Sigma^{a0i}\,. \qquad (26)$$

O surgimento de divergências totais na forma de densidades escalares ou vetoriais é possível no contexto de teorias contruídas a partir do tensor de torção, o que não é o caso de teorias métricas da gravitação.

Em termos da definição (21), podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\, e\, e^a{}_\mu(t^{0\mu}+T^{0\mu}) = -\oint_S dS_j\,\left[e\, e^a{}_\mu(t^{j\mu}+T^{j\mu})\right]\,, \qquad (27)$$

que representa uma equação de continuidade para o tensor de energia-momento total $t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}$. Assim, alternativamente, podemos reescrever P^a de uma forma mais familiar:

$$P^a = \int_V d^3x\, e\, e^a{}_\mu(t^{0\mu} + T^{0\mu})\,. \qquad (28)$$

Entretanto utilizaremos a expressão (25), por motivos práticos, uma vez que é muito mais fácil lidar com (25) do que (28).

O vínculo Γ^{ab} é

$$\Gamma^{ab} = M^{ab} + 4ke(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a})\,, \qquad (29)$$

com $M^{ab} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu M^{\mu\nu} = -M^{ba}$ e $M^{\mu\nu}$ definido como

$$M^{ik} = 2\Pi^{[ik]} = e_a{}^i\Pi^{ak} - e_a{}^k\Pi^{ai}\,, \qquad (30)$$

$$M^{0k} = \Pi^{0k} = e_a{}^0\Pi^{ak}\,. \qquad (31)$$

Assim como interpretamos a equação $C^a = 0$ como uma equação que define a energia-momento, a equação $\Gamma^{ab} = 0$ define a expressão do momento angular gravitacional. Ao analisarmos as dimensões desse vínculo, vemos que essa quantidade física tem que estar relacionada com o momento angular.

Portanto de maneira análoga à definição de P^a [11], a forma integral da equação de vínculo $\Gamma^{ab} = 0$ motiva a definição da densidade do 4-momento angular do espaço-tempo:

$$M^{ab} = -4ke(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a})\,. \tag{32}$$

e que, portanto, define

$$L^{ab} = -\int_V d^3x\; e^a{}_\mu e^b{}_\nu M^{\mu\nu}\,, \tag{33}$$

como o quadri-momento angular do campo gravitacional [2]. Essa expressão é invariante sob transformações de coordenadas do espaço tridimensional.

5. INTERPRETAÇÃO DO CAMPO DE TÉTRADAS

As invariâncias exibidas pela Lagrangeana (15) são responsáveis pela interpretação do campo de tétradas como sistemas de referência. Ou seja, a invariância da teoria por transformações globais SO(3,1) estabelece que dois campos de tétradas que (i) são soluções das equações de campo, (ii) produzem o mesmo tensor métrico e (iii) não se relacionam por nenhuma transformação global de Lorentz, descrevem dois sistemas de referência diferentes. Assim podemos adotar o significado físico desses objetos como sendo sistemas de referência adaptados a observadores ideais de massa nula no espaço-tempo.

Cada conjunto de tétradas define uma classe de sistemas de referência [15]. Se denotamos por $x^\mu(s)$ a linha mundo C de um observador no espaço-tempo, e por $u^\mu(s) = dx^\mu/ds$ sua velocidade ao longo de C, podemos fazer a identificação da velocidade do observador com a componente $a = (0)$ de $e_a{}^\mu$ [16]. A aceleração do observador é dado por $a^\mu = Du^\mu/ds = De_{(0)}{}^\mu/ds = u^\alpha\nabla_\alpha e_{(0)}{}^\mu$, onde a derivada covariante é escrita em termos dos símbolos de Christoffel.

Vemos, então, que $e_a{}^\mu$ determina a velocidade e a aceleração, ao longo de uma linha mundo, de um observador adaptado a um sistema de referência. Deste ponto de vista, concluímos que um conjunto de tétradas, para os quais $e_{(0)}{}^\mu$ descreve uma congruência de curvas do tipo tempo, é adaptado a uma classe de observadores. A título de comparação, devemos lembrar que se $e^a{}_\mu \to \delta^a_\mu$ no limite $r \to \infty$, então $e^a{}_\mu$ é adaptado a observadores estáticos no infinito espacial.

Podemos generalizar a noção de aceleração no espaço-tempo por meio da derivada absoluta da tétrada, ou seja

$$\frac{De_a{}^\mu}{ds} = \phi_a{}^b e_b{}^\mu\,, \tag{34}$$

onde ϕ_{ab} é o tensor de acelerações antissimétrico. Seguindo o que é apresentado em [17–19], em analogia ao tensor de Faraday podemos identificar $\phi_{ab} \to (\mathbf{a}, \mathbf{\Omega})$, onde $\mathbf{a}$ é a aceleração translacional ($\phi_{(0)(i)} = a_{(i)}$) e $\mathbf{\Omega}$ é a freqüência de rotação de um sistema de referência em relação a outro que não está em rotação (transporte de Fermi-Walker [16]).

Podemos inverter a relação (34), o que gera

$$\phi_a{}^b = e^b{}_\mu \frac{De_a{}^\mu}{ds} = e^b{}_\mu u^\lambda \nabla_\lambda e_a{}^\mu\,, \tag{35}$$

onde a derivada covariante é escrita em termos dos símbolos de Christoffel. Lembrando que esta conexão se relaciona com a conexão de spin definida em (9) por meio de (5), temos, quando a substituímos na expressão acima, a forma de ϕ_{ab}

$$\phi_{ab} = \frac{1}{2}[T_{(0)ab} + T_{a(0)b} - T_{b(0)a}]\,. \tag{36}$$

Interpretamos ϕ_{ab} como a aceleração inercial ao longo de $x^\mu(s)$.

6. O MOMENTO ANGULAR DE UM SISTEMA COM SIMETRIA AXIAL

Quando a simetria esférica é quebrada por uma rotação, temos uma simetria axial. Esse tipo de simetria engloba um grande número de configurações, de uma massa em rotação, passando por quasares, sistemas binários, aglomerados de galáxias, até o buraco negro de Kerr. É bom ressaltar que para o caso de Kerr a singularidade da configuração não permite conclusões inequívocas, uma vez que estaremos lidando com um observador estático e sabemos que na região conhecida como ergoesfera não é possível existir tal situação.

O tensor métrico mais geral para uma simetria axial [20] é dado por

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}d\phi dt + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2\,, \tag{37}$$

sendo todas as componentes do tensor métrico dependentes de r e θ.

Com a finalidade de calcular o momento angular para essa configuração temos que calcular o tensor métrico contravariante. Fazendo isso temos

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{g_{33}}{\delta} & 0 & 0 & \frac{g_{03}}{\delta} \\ 0 & \frac{1}{g_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_{22}} & 0 \\ \frac{g_{03}}{\delta} & 0 & 0 & -\frac{g_{00}}{\delta} \end{pmatrix}, \tag{38}$$

com $\delta = g_{03}g_{03} - g_{00}g_{33}$.

A seguir vamos fazer a análise do momento angular para um observador estático [21].

A. Observador Estático

Um observador estático é caracterizado por um campo de velocidade do tipo $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ ao longo de uma linha mundo C. Uma vez que fazemos a identificação $u^\mu = e_{(0)}{}^\mu$ podemos concluir que para observadores estáticos a condição $e_{(0)}{}^k = 0$ deve ser satisfeita, claro que dessa condição temos $e^{(i)}{}_0 = 0$, conforme foi analisado no capítulo anterior. Escolhendo um observador estático adaptado a esse sistema, temos

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & -B \\ 0 & \sqrt{g_{11}}\sin\theta\cos\phi & \sqrt{g_{22}}\cos\theta\cos\phi & -C\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \sqrt{g_{11}}\sin\theta\sin\phi & \sqrt{g_{22}}\cos\theta\sin\phi & C\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \sqrt{g_{11}}\cos\theta & -\sqrt{g_{22}}\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(-g_{00})}\,, \\ AB &= -\frac{g_{03}}{A}\,, \\ C\sin\theta &= \frac{\delta^{1/2}}{\sqrt{(-g_{00})}}\,. \end{aligned} \tag{40}$$

O determinante da tétrada $e^a{}_\mu$ é $e = \sqrt{g_{11}g_{22}\delta}$. Devemos notar que o campo de tétradas (39) gera a quadrivelocidade $e_{(0)}{}^\mu = (\frac{1}{A}, 0, 0, 0)$, isso mostra que esse campo de tétradas é realmente adaptado a observadores estáticos.

Com isso, após uma série de manipulações tediosas mas simples, verificamos que a expressão para $M^{(1)(2)}$ pode ser escrita como

$$M^{(1)(2)} = 2k\left[\partial_1\left(\frac{g_{03}\sqrt{g_{22}}\sin\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\right) + \partial_2\left(\frac{g_{03}\sqrt{g_{11}}\cos\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\right)\right]. \tag{41}$$

Para $M^{(0)(3)}$ temos

$$M^{(0)(3)} = 2k\left[\partial_1\left(\frac{\delta^{1/2}\sqrt{g_{22}}\cos\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\right) - \partial_2\left(\frac{\delta^{1/2}\sqrt{g_{11}}\sin\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\right)\right]. \tag{42}$$

As outras componentes de M^{ab} vão gerar componentes do momento angular iguais a zero, porque a sua dependência em relação a ϕ é dado por um $\sin\phi$, um $\cos\phi$, ou um produto de ambos. Isso será nulo quando integrarmos sobre essa variável.

Finalmente, integrando M^{ab}, as componentes do momento angular L^{ab} são

$$\begin{aligned} L^{(0)(3)} &= -2k\oint_{S\to\infty} d\theta d\phi\left(\frac{\delta^{1/2}\sqrt{g_{22}}\cos\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\right), \\ L^{(1)(2)} &= -2k\oint_{S\to\infty} d\theta d\phi\left(\frac{g_{03}\sqrt{g_{22}}\sin\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\right). \end{aligned} \tag{43}$$

Devemos notar que, de modo análogo ao que é feito nas referências [22] e [23], o comportamento assintótico da métrica determina se o momento angular é bem definido, especialmente o comportamento das componentes g_{00} e g_{03}, as quais estão intimamente relacionadas às funções lapso e "shift". Ou seja, se o tensor métrico tiver o comportamento assintótico

$$\begin{aligned} g_{03} &\cong O(1/r) + ... \\ g_{22} &\cong r^2 + O(r) + ... \\ -g_{00} &\cong 1 + O(1/r) + ...\,, \end{aligned} \tag{44}$$

então o momento angular espacial $L^{(1)(2)}$ será bem definido. As expressões em (43) constituem um dos resultados mais importantes deste artigo, pois são expressões que não dependem do sistema de coordenadas.

1. *Estrela de Nêutrons:*

Para uma estrela de nêutrons em rotação aproximadamente rígida [24], o tensor métrico é dado pelo elemento de linha

$$ds^2 = -A'^2dt^2 + B'^2dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta(d\phi - \omega dt)^2\,. \tag{45}$$

O comportamento desses parâmetros, segundo é desenvolvido em [24], é o seguinte:

Para $r \le R$,

$$\begin{aligned} A' &= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho R^2\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2\right)^{1/2}, \\ B'^2 &= \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2\right)^{-1}, \\ \omega &= \omega(0)\left[1 - b\Big(\frac{r}{R}\Big)^2 - b\tau\Big(\frac{r}{R}\Big)^4\right], \end{aligned} \tag{46}$$

para $r \ge R$,

$$\begin{aligned} A'^2 &= \left[1 - \frac{2m(R)}{r}\right], \\ B'^2 &= \left[1 - \frac{2m(R)}{r}\right]^{-1}, \\ \omega &= 2Jr^{-3}\,, \end{aligned} \tag{47}$$

onde R é o raio da estrela, ω é a velocidade de observadores inerciais ao longo do eixo de rotação, ρ é a densidade (uniforme) da estrela e J é o momento angular da estrela. A quantidade b é definida por $b = 3/(5 + 7\tau)$, onde τ é um parâmetro livre.

Para calcular $L^{(0)(3)}$ vamos utilizar a primeira expressão de (43). Lembrando que $\delta^{1/2} = A'r\sin\theta$, $\sqrt{-g_{00}} = (A'^2 - \omega^2r^2\sin^2\theta)^{1/2}$, $\sqrt{g_{22}} = r$ e $\omega r^3 = 2J$, então

$$L^{(0)(3)} = -4\pi k \lim_{r\to\infty}\int_0^\pi d\theta \frac{A'r^2\sin\theta\cos\theta}{(A'^2 - 2J\sin^2\theta/r)^{1/2}}\,, \tag{48}$$

uma vez que o denominador da expressão acima tende a 1 com $r \to \infty$, claro que $L^{(0)(3)}$ é zero, pois $\int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos\theta = 0$.

Vamos usar a segunda expressão de (43) e calcular $L^{(1)(2)}$. Considerando que $g_{03} = -\omega r^2 \sin^2\theta$ $\sqrt{-g_{00}} = (A'^{\,2} - \omega^2 r^2 \sin^2\theta)^{1/2}$, $\sqrt{g_{22}} = r$ e $\omega r^3 = 2J$, então

$$\begin{aligned} L^{(1)(2)} &= -4\pi k \lim_{r\to\infty} \int_0^\pi d\theta \frac{\omega r^3 \sin^3\theta}{(A'^{\,2} - 2J\sin^2\theta/r)^{1/2}} = \\ &= 8k\pi J \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \,. \end{aligned} \tag{49}$$

Assim, considerando que $\int_0^\pi d\theta \sin^3\theta = \frac{4}{3}$, o momento angular gravitacional resulta em

$$L^{(1)(2)} = \frac{2}{3} J \,. \tag{50}$$

Onde substituímos o valor $k = \frac{1}{16\pi}$. Deste modo, o momento angular do campo é dado em termos do momento angular da fonte.

7. CONCLUSÃO

Neste trabalho abordamos uma expressão para o momento angular gravitacional na formulação teleparalela, haja vista que a definição de momento energia já é bem estabelecido [11, 25, 26]. As definições para o momento angular e energia-momento gravitacionais são invariantes por transformações de coordenadas no espaço tridimensional, pois são projetadas no espaço tangente. Uma característica compartilhada pela nossa expressão de momento angular e as expressões da Mecânica Clássica é a dependência do sistema de referência, o que não é inconsistente com a interpretação física de referencial e nem com o princípio da equivalência. Analisamos as condições necessárias para que o momento angular seja bem definido e estabelecemos qual deve ser o comportamento assintótico do tensor métrico para que isso ocorra. Aplicamos a nossa expressão para uma configuração com simetria axial em relação a um observador estático e verificamos que o resultado é coerente pois a nossa expressão tem dimensão de momento angular e é dada, no caso específico de uma estrela de nêutrons em rotação, em termos do momento angular da fonte. Portanto vemos que as dificuldades encontradas na formulação métrica da relatividade geral não são compartilhadas pelo formalismo que usamos e concluímos que para entendermos as características de um sistema gravitacional, basta focarmos nas simetrias do sistema. Esse poder do TEGR em sua formulação Hamiltoniana é evidenciado pelo que expomos neste trabalho.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado parcialmente pelo CNPq. O autor é grato ao professor José Wadih Maluf pelas discussões e comentários úteis, bem como pelo incentivo para elaboração deste trabalho.

[1] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, T. M. L. Toríbio, and K. H. Castello-Branco, Phys. Rev. D **65**, 124001 (2002).
[2] J. W. Maluf, S. C. Ulhoa, F. F. Faria, and J. F. da Rocha-Neto, Classical and Quantum Gravity **23**, 6245 (2006), URL `http://stacks.iop.org/0264-9381/23/6245`.
[3] J. D. Brown and J. W. York, Phys. Rev. D **47**, 1407 (1993).
[4] A. Komar, Phys. Rev. **113**, 934 (1959).
[5] J. M. Aguirregabiria, A. Chamorro, and K. S. Virbhadra, Gen. Rel. Grav. **28**, 1393 (1996), gr-qc/9501002.
[6] L. B. Szabados, Living Reviews in Relativity **7** (2004), URL `http://www.livingreviews.org/lrr-2004-4`.
[7] T. Regge and C. Teitelboim, Annals of Physics **88**, 286 (1974), URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WB1-4DDR5WY-19V/2/0002487b1bdb9c911ea323200b7aebee`.
[8] C. Möller, in *Evidence for Gravitational Theories*, edited by C. Møller (1961), p. 252.
[9] A. Einstein, Math. Annal. **102**, 685 (1930).
[10] J. W. Maluf, Physical Review D **67**, 108501 (2003), URL `http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:gr-qc/0304005`.
[11] J. W. Maluf, Annalen Phys. **14**, 723 (2005), gr-qc/0504077.
[12] S. V. Babak and L. P. Grishchuk, Phys. Rev. D **61**, 024038 (1999).
[13] J. W. Maluf and J. F. da Rocha-Neto, Phys. Rev. D **64**, 084014 (2001).
[14] R. Arnowitt, S. Deser, and C. Misner, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, edited by L. Witten (Wiley, New York, U.S.A., 1962), pp. 227–265.
[15] J. W. Maluf, M. V. O. Veiga, and J. F. da Rocha-Neto, Gen. Rel. Grav. **39**, 227 (2007), gr-qc/0507122.
[16] F. W. Hehl, J. Lemke, and E. W. Mielke, in *Geometry and Theoretical Physics*, edited by J. Debrus and A. C. Hirshfeld (Springer, Berlim, 1991).
[17] B. Mashhoon and U. Muench, Annalen Phys. **11**, 532 (2002), gr-qc/0206082.
[18] B. Mashhoon, Annalen Phys. **12**, 586 (2003), hep-th/0309124.
[19] J. W. Maluf, F. F. Faria, and S. C. Ulhoa, Class. Quant. Grav. **24**, 2743 (2007), 0704.0986.
[20] N. K. Glendenning, *Compact Stars* (Springer, New York, 2000), 2nd ed.
[21] J. W. Maluf and S. C. Ulhoa (2008), 0810.1934.
[22] R. Beig and N. ó Murchadha, Annals of Physics **174**, 463 (1987), URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WB1-4DDR713-1MP/2/9617f825a9082a0320d6f34b827e85e1`.
[23] L. B. Szabados, Classical and Quantum Gravity **20**, 2627 (2003), URL `http://stacks.iop.org/0264-9381/20/2627`.

[24] R. C. Adams, J. M. Cohen, R. J. Adler, and C. Sheffield, The Astrophysical Journal **192**, 525 (1974).

[25] J. W. Maluf and F. F. Faria, Annalen Phys. **13**, 604 (2004), gr-qc/0405142.

[26] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen, and J. G. Pereira, Phys. Rev. Lett. **84**, 4533 (2000).