Quanta energia cinética é possível se perder em uma colisão inelástica?

Paulo Machado Mors
*Programa de Pós-graduação em Ensino de Física — Instituto de Física — Universidade Federal do Rio Grande do Sul — Campus do Vale, Avenida Bento Gonçalves, 9500 Caixa Postal 15051, 91501-970, Porto Alegre, RS**

Quando do estudo de colisões, é dito que uma colisão é perfeitamente inelástica quando os corpos participantes apresentam, após o choque, a mesma velocidade. Comenta-se, aqui, o porquê da expressão. É apresentado um tratamento matemático complementar que, se não cabe em um texto de nível médio, entendemos poder ser esclarecedor em textos universitários.

O tratamento das colisões, seguindo-se ao estudo da quantidade de movimento (momentum) linear e sua conservação, tem uma classificação padrão, apresentada tanto em textos de nível médio (MÁXIMO e ALVARENGA, 2006 [1]; GASPAR, 2003 [2]) quanto em textos de nível superior (TIPLER e MOSCA, 2009 [3]; NUSSENZVEIG, 1983 [4]; HALLIDAY, RESNICK e WALKER, 1996 [5]). Nesta classificação, o termo *colisão perfeitamente (ou completamente, ou totalmente) inelástica* é usado para designar o choque entre objetos que, após o encontro, passam a desenvolver a mesma velocidade (mantendo-se, normalmente, grudados entre si). Observamos que os textos didáticos não se preocupam em melhor explorar o significado energético desse tipo de colisão, e nem o porquê de sua denominação.

Transcrevemos, a seguir, e passamos a comentar, afirmativas feitas sobre a questão nos textos acima referidos.

Em um dos mais tradicionais textos de Física para o ensino médio, Antônio Máximo e Beatriz Alvarenga [1] colocam:

> *Um caso particular de colisão inelástica ocorre quando os corpos, após o choque, passam a ter velocidades iguais. Isso ocorre, por exemplo, quando dois automóveis colidem e movem-se colados após o choque. Nesse caso, verifica-se a maior redução possível no valor da energia cinética do sistema. Por isso, essa colisão é denominada completamente inelástica.* (MÁXIMO E ALVARENGA, 2006 [1], p. 330.)

A afirmativa é feita, e mais não é desenvolvido. Ou seja, é informado que o termo "colisão completamente inelástica"é adotado devido à maior redução possível de energia cinética, sem que seja demonstrado que isso é o que ocorre quando as velocidades finais são iguais.

Em outro texto muito utilizado, ainda no ensino médio, Alberto Gaspar, dentro de um quadro intitulado *O coeficiente de restituição e a variação da energia cinética*, apresenta o coeficiente de restituição de uma colisão unidimensional entre duas partículas como sendo a razão entre a rapidez relativa de afastamento após o choque e a rapidez relativa de aproximação antes do choque, acrescentando:

> *Mas, se num choque elástico essa razão é 1 e a energia cinética se conserva, num choque perfeitamente inelástico, essa razão é zero pois os corpos se agrupam depois do choque, e a energia cinética tem perda máxima.* (GASPAR, 2003 [2], p. 250.)

Mais uma vez temos, aí, uma afirmativa não completamente demonstrada.

Dentre os textos mais utilizados no ensino superior, Halliday, Resnick e Walker [5] se limitam a escrever:

> *Quando os corpos aderem um ao outro em uma colisão perfeitamente inelástica, a quantidade de energia cinética que se perde é a máxima permitida pela conservação do momento (sic) linear. Em algumas situações, o sistema pode perder toda a sua energia cinética.* (HALLIDAY, RESNICK e WALKER, 1996 [5], p. 222.)

Aqui, em se tratando de um texto universitário, acreditamos que seria plenamente justificado esperar-se um detalhamento da afirmativa.

Outro texto universitário, de Tipler e Mosca [3], traz a seguinte frase:

> *Quando a energia cinética total do sistema de dois corpos é a mesma antes e depois da colisão, a colisão é chamada de colisão elástica. Caso contrário, ela é chamada de colisão inelástica. Um caso extremo é o da colisão perfeitamente inelástica, durante a qual toda a energia cinética em relação ao centro de massa é convertida em energia térmica ou interna do sistema, e os dois corpos passam a ter a mesma velocidade comum (com frequência, grudados um ao outro), no final da colisão.* (TIPLER e MOSCA, 2009 [3], p.248.)

Mais adiante, os mesmos autores, ao definirem o coeficiente de restituição e, complementam: *Para uma colisão elástica,* $e = 1$. *Para uma colisão perfeitamente inelástica,* $e = 0$. (TIPLER e MOSCA, 2009 [3], p.260.)

*mors@if.ufrgs.br

Aqui, o centro de massa é referido, apesar do estudo de colisões no referencial do centro de massa ser insuficientemente tratado mais adiante.

O texto de Física universitária de Nussenzveig [4] destaca:

> *Como exemplo de colisão inelástica em uma dimensão, vamos considerar apenas uma colisão totalmente inelástica. Isto não quer dizer que a energia cinética final se anula, o que seria impossível, mas que ela assume o menor valor possível, que é o valor da energia cinética associada ao movimento do centro de massa. Com efeito, as forças que atuam na colisão sendo forças internas, o CM tem de permanecer em movimento retilíneo e uniforme, e o valor mínimo da energia cinética é aquele correspondente a esse movimento.* (NUSSENZVEIG, 1983 [4], p. 277.)

Esta afirmativa é complementar àquela feita por Tipler e Mosca [3]: toda a energia cinética em relação ao centro de massa é transformada em outras formas de energia, enquanto que resta a energia cinética associada ao movimento do centro de massa. Na verdade, é incorreto que seja impossível essa energia ser nula – imagine-se o caso de dois corpos de momenta lineares de mesmo módulo chocando-se frontalmente, quando o momentum linear total é nulo e o CM permanece em repouso. Claro, esta é uma situação muito particular, e não invalida a qualidade da argumentação.

Vemos, portanto, que, dos cinco textos visitados, apenas dois – ambos dirigidos ao estudante de nível superior – citam a visão a partir do referencial do centro de massa como sendo aquela que traz, de imediato, uma compreensão para a questão. Isto é tão claro e simples, e de tão importante conteúdo físico, que fica difícil aceitar que não seja mencionado em todos os textos, em qualquer nível.

Mas, se se pretende, em um primeiro momento, evitar uma análise no referencial do centro de massa, um cálculo simples pode ser apresentado, no caso de uma colisão unidimensional entre duas partículas. Passamos a comentá-lo.

Sejam duas partículas, de massas m_1 e m_2, deslocando-se em determinada direção x. Sejam p_1 e p_2 os respectivos momenta lineares das duas partículas. (Um valor positivo de p significa o vetor momentum linear apontando no sentido do eixo referencial; caso contrário, p será negativo.) Imaginemos o eixo dos x apontando para a direita, com a partícula de massa m_1 se deslocando à esquerda daquela de massa m_2. Então, para que haja o choque, devemos ter, ou $p_1 > p_2 > 0$, ou $p_2 < p_1 < 0$, ou $p_1 > 0$ e $p_2 < 0$. Isto satisfeito, a colisão se dará.

Como a energia cinética de uma partícula de massa m e velocidade $\dot{x}$ ($\dot{x} = \frac{dx}{dt}$), definida como $K = \frac{m\dot{x}^2}{2}$, também pode ser escrita como $K = p^2/2m$, já que $p = m\dot{x}$, a conservação de energia para a colisão pode ser escrita como

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q \; . \tag{1}$$

O símbolo p_i' denota o momentum da i-ésima partícula após o choque ter ocorrido, e Q representa a quantidade de energia (cinética) perdida na colisão. Vamos considerar $Q > 0$, isto é, um choque em que se perde energia cinética, já que este é o estudo a que estamos nos propondo.

Por conservação de momentum:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' = P \; , \tag{2}$$

onde P é o momentum total do sistema.

Daí, escrevendo p_2' em termos das outras variáveis, temos que $p_2'^2 = P^2 + p_1'^2 - 2Pp_1'$. Substituindo em (1), fica:

$$Q = \frac{1}{2m_1}(p_1^2 - p_1'^2) + \frac{1}{2m_2}(p_2^2 - P^2 - p_1'^2 + 2Pp_1') \; ,$$

relação que pode ser reescrita como

$$Q = R - \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) p_1'^2 + \frac{Pp_1'}{m_2} \; , \tag{3}$$

onde $R = \frac{1}{2m_1}p_1^2 + \frac{1}{2m_2}(p_2^2 - P^2)$ é uma constante, uma vez que dependente apenas dos momenta iniciais e do momentum total.

O que se procura é a condição para que a perda de energia seja máxima. Isto pode ser encontrado derivando-se a Equação (3) em relação a p_1' e igualando a zero, o que leva a

$$p_1' = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) P \; . \tag{4}$$

Combinando as Equações (2) e (4), esta condição pode ser expressa pela seguinte relação entre os momenta emergentes das partículas:

$$p_2' = \frac{m_2}{m_1} p_1' \; . \tag{5}$$

Em termos das velocidades, a Equação (5) equivale a $\dot{x}_1' - \dot{x}_2' = 0$, o que significa que as velocidades das duas partículas, após a colisão, são iguais.

De maneira geral, em uma colisão entre duas partículas no espaço tridimensional, se a análise é feita sob o ponto de vista do referencial do CM, então os momenta lineares das partículas relativos ao CM serão dois vetores opostos, que somam zero, antes do choque, e nulos (partículas unidas em seu CM) após o choque, o que, em última análise, também se reduz a uma visão unidimensional.

Note-se que, obviamente, o tratamento aqui apresentado não cabe em um texto de nível médio; no entanto, julgamos conveniente e importante não omitir esse tipo de abordagem em textos de nível universitário.

Em uma dimensão, é usual se definir o coeficiente de restituição como a razão entre a rapidez relativa de afastamento das partículas antes do choque e a rapidez relativa de aproximação das partículas após o choque:

$$e = \frac{\dot{x}_2' - \dot{x}_1'}{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}\ . \tag{6}$$

confirmando a assertiva de, entre outros, Tipler e Mosca (2009 [3], p.260).

Os cálculos apresentados neste artigo, até onde vai nosso conhecimento, não estão explicitados em nenhum livro-texto universitário de uso comum no sistema de ensino superior brasileiro.

Desejamos enfatizar que, muitas vezes, os livros-texto deixam de ressaltar algo que possa levantar uma discussão que leve a uma melhor compreensão de conceitos físicos e sua relação com a Matemática. O professor não pode, portanto, ater-se ao texto; muito pelo contrário, sua preocupação deve ser exatamente a de procurar trazer para a sala de aula questões instigantes, e isso muitas vezes acontece com a colaboração dos próprios alunos.

[1] MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B. *Curso de física. 6. ed.* São Paulo: Scipione, 2006. 136 p. v. 1.

[2] GASPAR, A. *Física. 1. ed.* São Paulo: Ática, 2003. 384 p. v. 1.

[3] TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para cientistas e engenheiros. 6. ed.* Rio de Janeiro: LTC, 2009. 759 p. v. 1.

[4] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica. 1. ed.* São Paulo: Edgar Blücher, 1981. 519 p. v. 1.

[5] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física. 1. ed.* Rio de Janeiro: LTC, 1996. 330 p. v. 1.