

A Partícula na Caixa Circular

Rogério Custodio *

rogerct@unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Química

Informações sobre o artigo

Histórico do Artigo

Submetido em 17 de novembro de 2022

Aceito em 02 de dezembro de 2022

Palavras-chave:

Partícula no anel
Equações diferenciais
Transformação de coordenadas
Coordenadas polares
Equação de Schrödinger

Resumo

O modelo da partícula na caixa em coordenadas cartesianas foi descrito analítica e numericamente em texto recente através da equação de Schrödinger. A alteração da forma da caixa não só modifica a solução da equação de Schrödinger, mas produz maneiras diferentes de abordar o problema da partícula na caixa e introduz novos desafios matemáticos. O nível de complexidade da equação de Schrödinger pode sofrer alterações significativas com o sistema de coordenadas utilizado. No caso das coordenadas polares, uma consequência imediata corresponde ao aparecimento natural de degenerescência orbital, compatível com a descrição de determinados sistemas moleculares, tais como os elétrons pi do anel de benzeno. Outro aspecto importante é que a partícula no anel corresponde a parte da solução da equação de Schrödinger para, por exemplo, o rotor rígido e o átomo de hidrogênio. O presente texto aborda alternativas para a resolução da equação de Schrödinger para o sistema circular mais simples, a partícula no anel.



Introdução

Em disciplinas introdutórias de mecânica quântica, após a apresentação dos postulados [1] inicia-se uma série de aplicações da equação de Schrödinger em problemas de crescente nível de complexidade. Um dos primeiros exemplos é o da partícula na caixa unidimensional [2], bidimensional e/ou tridimensional em coordenadas cartesianas. A vantagem desses sistemas é a relativa simplicidade da solução da equação de Schrödinger com a ausência de uma função potencial, restringindo a completa liberdade de movimento sem a ação de qualquer potencial dentro da caixa. Na sequência usualmente se tratam movimentos não-lineares para se chegar na solução do rotor rígido e, posteriormente, o átomo de hidrogênio. O rotor continua sendo um sistema sem qualquer inclusão de uma função potencial, enquanto o átomo de hidrogênio considera a energia de atração nuclear. Porém, a mudança dos movimentos lineares para circulares introduz formas de representação matemática que levam alunos a considerar os sistemas mais complicados e difícil de entender ou mesmo memorizar. O presente texto explora alguns dos conceitos envolvidos na representação quântica de um sistema circular muito simples, a partícula no anel.

Antes de iniciar a descrição quântica da partícula em um anel é interessante estabelecer uma relação entre o movi-

mento linear e o movimento circular em seus conceitos fundamentais. Embora a denominação física sofra alguma alteração, as expressões matemáticas que definem as propriedades elementares são essencialmente as mesmas, como pode ser observado na tabela a seguir [3]:

Movimento Linear	Movimento Angular
Distância, x	Ângulo, f
Velocidade, $V_x=(dx/dt)$	Velocidade angular, $V_\varphi=(d\varphi/dt)$
Aceleração, $a_x=(d^2x/dt^2)$	Aceleração angular, $a_\varphi=(d^2\varphi/dt^2)$
Mass, m	Momento de inércia, $I = mr^2$
Momento linear, $p_x=mv_x$	Momento angular, $L=IV_\varphi$
Energia cinética, $T=p_x^2/2m$	Energia cinética, $T=L^2/2I$
Força	Torque

Portanto, embora as características do sistema ou da dinâmica clássica/quântica sejam diferentes, as definições matemáticas são idênticas e dependem apenas das variáveis envolvidas, em outras palavras, do sistema de coordenadas empregado. A partir da associação das propriedades angulares com as melhor conhecidas propriedades

lineares, pode-se iniciar a análise de um sistema circular na visão da mecânica quântica e clássica: o movimento circular de uma partícula ou a representação quântica da partícula no anel.

É importante mencionar que apesar da constante apresentação da solução da partícula na caixa em coordenadas cartesianas, a partícula no anel é negligenciada ou mesmo não apresentada aos alunos ou ainda não estabelecida a associação deste sistema com o rotor rígido ou o átomo de hidrogênio [4]. Um exemplo recente da sua aplicação na descrição de efeitos específicos das ligações pi do anel de benzeno foram discutidos em artigo por Solà e Bickelhaupt [5]. Nesse artigo, os autores chamam a atenção para a descrição aceitável da nuvem pi através da partícula no anel e sua associação adequada com a energia de estabilização de ressonância e as regras de Hückel e Baird, frequentemente mencionadas em química orgânica.

A partícula em um anel

A energia de uma partícula com massa m em movimento circular no plano xy sem sofrer o efeito de nenhum potencial pode ser descrita pela energia cinética (T) como:

$$T = \frac{m}{2} [v_x^2 + v_y^2] = \frac{1}{2m} [p_x^2 + p_y^2] \quad \text{eq. 1}$$

Para a representação quântica, existem duas sequências para a descrição mecânica deste sistema. Pode-se construir o operador hamiltoniano a partir da **eq.1** e posteriormente efetuar uma transformação de coordenadas ou efetuar uma transformação de coordenadas conveniente e posteriormente construir o operador hamiltoniano. Com o operador hamiltoniano, pode-se resolver a equação de Schrödinger independente do tempo, [1,2]. A escolha por qualquer uma das alternativas é apenas uma questão de conveniência baseada na busca pelo caminho mais simples para se construir e resolver a equação de Schrödinger. Pode-se observar que a escolha do caminho produz resultados que levam ao aprendizado de conceitos importantes e devem ser explorados, se não como exercício, como avaliação mais profunda do quadro físico que pode ser adquirido.

Considerando o primeiro caminho, o operador hamiltoniano em coordenadas cartesianas a partir da **eq.1** será escrito como (ver ref. [2]):

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \quad \text{eq. 2}$$

Uma vez que o movimento é circular, convém realizar uma transformação de *coordenadas cartesianas* (x,y) para *coordenadas polares* ou *plano polares* (r,ϕ) (**Apêndice 1**). Nesse sistema de coordenadas a **eq.2** passa a ser escrita como:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad \text{eq. 3}$$

Mantendo-se a órbita circular com raio constante (r_c), o operador hamiltoniano será simplificado para:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2mr_c^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \quad \text{eq. 4}$$

O termo no denominador acima, $I=mr_c^2$, é conhecido como *momento de inércia*. A equação de Schrödinger a ser resolvida para esse sistema será então escrita como:

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} = E\Psi(\phi) \quad \text{eq. 5}$$

Rearranjando, esta equação será escrita como:

$$\frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} = -\frac{2IE}{\hbar^2} \Psi(\phi) \quad \text{eq. 6}$$

Analisando-se esta equação, verifica-se que diferentes soluções podem ser consideradas. A equação está indicando que as funções de onda que podem ser utilizadas satisfazendo a igualdade dada pela eq.6 são expressões matemáticas que derivadas duas vezes produzam como resultado a própria função de onda multiplicada por uma constante. Possíveis expressões que satisfazem essa condição são funções do tipo: $\sin(k\phi)$, $\cos(k\phi)$, $\exp(k\phi)$, combinações de \sin e/ou \cos e uma série de outras alternativas. A escolha adequada é definida considerando uma avaliação de conveniência, simplicidade e rigor matemático. A possibilidade adotada na presente resolução será:

$$\Psi(\phi) = e^{im_l\phi} \quad \text{eq. 7}$$

Para resolver a **eq.6** e determinar o valor da constante m_l deve-se determinar quais são as *condições de contorno* a serem utilizadas para resolver a equação. Diferente da resolução da partícula na caixa [2], a *condição de contorno* será uma *condição de continuidade* que determina que a função de onda em um ângulo ϕ qualquer deverá ter o mesmo valor após completar um ciclo completo de 2π , ou seja:

$$\Psi(\phi) = \Psi(\phi + 2\pi) \quad \text{eq. 8}$$

Uma vez que a função de onda tentativa foi definida pela **eq.7**, verifica-se que:

$$e^{im_l\phi} = e^{im_l(\phi+2\pi)} = e^{im_l\phi} e^{im_l2\pi} \quad \text{eq. 9}$$

Pode-se observar que a exponencial dependente de ϕ será cancelada com a igualdade mostrada nesta equação. Assim, somente a exponencial à direita da **eq.9**,

$$1 = e^{im_l2\pi}$$

será preservada. As funções exponenciais imaginárias podem ser substituídas pela *igualdade de Euler*, ou seja:

$$e^{im_l2\pi} = 1 = \cos(m_l2\pi) + i\sin(m_l2\pi) \quad \text{eq.10}$$

Para que esta equação seja satisfeita, m_l deve ser um número inteiro positivo ou negativo, ou seja, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Derivando-se duas vezes a função apresentada na **eq.7** e comparando-se o resultado com a **eq.6**, verifica-se que:

$$m_l = \pm \frac{\sqrt{2IE}}{\hbar} \quad \text{eq. 11}$$

Através desta equação pode-se isolar a energia do movimento circular com raio constante como:

$$E = \frac{m_l^2 \hbar^2}{2I} = \frac{m_l^2 \hbar^2}{8\pi^2 I} \quad \text{eq.12}$$

Com isto, a resolução da equação de Schrödinger indica claramente que o movimento circular produz energias quantizadas. Um outro aspecto importante está no fato do valor do número quântico m_l apresentar valores positivos e negativos. Porém, deve-se observar que na eq.12 o valor de m_l é elevado ao quadrado, o que produz dois valores de energia idênticos com os dois valores de m_l com sinais opostos. Em outras palavras, a partícula no anel apresenta uma degenerescência, que permite o seu uso para representar mais adequadamente sistemas que apresentam esta propriedade eletrônica, como mencionado na referência [5].

Por outro lado, a função de onda definida pela **eq.7** precisa ser normalizada. A normalização desta função de onda será avaliada multiplicando-se a **eq.7** por uma constante N [2], ou seja:

$$\Psi(\phi) = Ne^{im_l \phi} \quad \text{eq.13}$$

Este fator N corresponde ao *fator de normalização*, que mantém a probabilidade do sistema entre 0 e 1, e é determinado por:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{2\pi} \Psi^*(\phi)\Psi(\phi)d\phi = N^2 \int_0^{2\pi} e^{-im_l \phi} e^{im_l \phi} d\phi = \\ &= N^2 \int_0^{2\pi} d\phi = N^2 2\pi \quad \text{eq. 14} \end{aligned}$$

Assim, isolando-se N verifica-se que será igual a

$$N = \pm 1/\sqrt{2\pi}$$

e a função de onda normalizada será definida como

$$\Psi(\phi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} e^{im_l \phi} \quad \text{eq.15}$$

O fator de normalização da **eq.15** foi definido arbitrariamente com o sinal positivo. Apesar da escolha do sinal não proporcionar alterações além da *fase da função de onda*, será verificado mais abaixo que a escolha do sinal do fator de normalização em determinadas circunstâncias pode ser fundamental para a manutenção da coerência do cálculo de determinadas propriedades físicas.

Um outro procedimento

Pode-se agora considerar a segunda maneira de resolver o problema da partícula no anel através da definição clássica

de energia cinética, transformação de coordenadas na **eq.1** e posteriormente construir o operador hamiltoniano.

A velocidade de um objeto em movimento circular pode ser submetida à transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas polares convertendo as componentes de velocidade v_x e v_y em termos de uma componente radial (v_r) e uma componente angular (v_ϕ). Esta transformação é obtida empregando-se a *regra da cadeia* ou matematicamente:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{dx}{dr} + \frac{d\phi}{dt} \frac{dx}{d\phi} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{dy}{dr} + \frac{d\phi}{dt} \frac{dy}{d\phi} \end{aligned} \quad \text{eq.16}$$

Nesta equação pode-se identificar a *velocidade radial* ($v_r = dr/dt$) e a *velocidade angular* ($v_\phi = d\phi/dt$). As outras derivadas são determinadas pelas transformações entre os dois sistemas de coordenadas (**Apêndice 1**). Considerando que o raio é constante, as velocidades radiais são iguais a zero, uma vez que não apresentam qualquer variação durante a rotação, o que leva as componentes de velocidade a serem escritas como:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -v_\phi r \sin\phi \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = v_\phi r \cos\phi \end{aligned} \quad \text{eq.17}$$

Substituindo-se as componentes cartesianas da **eq.17** na **eq.1** têm-se:

$$E_{r,\phi} = \frac{1}{2} m v_\phi^2 r^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \frac{1}{2} m v_\phi^2 r^2 \quad \text{eq.18}$$

Esta equação pode ser escrita utilizando-se a definição mencionada acima de *momento de inércia*, $I = mr^2$, como:

$$E_{r,\phi} = \frac{1}{2} v_\phi^2 I \quad \text{eq.19}$$

O produto da *velocidade angular* pelo *momento de inércia* corresponde à outra grandeza conhecida como *momento angular* ($L = v_\phi I$). O *momento angular* é uma *propriedade vetorial* com direção perpendicular ao plano em que a rotação é realizada. Neste caso em particular, considerando que o movimento ocorre no plano xy , o vetor momento angular estará orientado perpendicularmente a este plano e deve apontar no sentido positivo ou negativo do eixo z (**Fig.1**). Utilizando a definição de momento angular, a **eq.19** será escrita como:

$$E_{r,\phi} = \frac{L^2}{2I} \quad \text{eq.20}$$

Esta representação clássica da energia de rotação no anel define a função hamiltoniana que deverá ser convertida no respectivo operador mecânico-quântico a ser utilizado na equação de Schrödinger. [1] Porém, uma vez que se trata da descrição física do mesmo sistema, o operador hamiltoniano obtido a partir da **eq.20** deve ser o mesmo utilizado

na **eq.5**. Comparando-se as duas equações pode-se concluir que para o movimento circular no plano xy o *operador momento angular* ao quadrado [1] será igual a:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{d\phi^2} \quad \text{eq.21}$$

Uma segunda conclusão importante a ser obtida comparando-se os dois procedimentos para construção da equação de Schrödinger é que substituindo a expressão para a energia do movimento circular (**eq.12**) e a definição do *operador de momento angular* (**eq.21**) na **eq.5** pode-se verificar que o autovalor do momento angular ao quadrado será:

$$|L|^2 = m_l^2 \hbar^2 \quad \text{eq.22}$$

Em outras palavras, a *quantização do movimento circular* corresponde à *quantização do momento angular*. A norma ou módulo do vetor momento angular pode ser estimada através do número quântico m_l como

$$|\vec{L}| = m_l \hbar$$

ou seja, a *norma do vetor momento angular* é definida como um múltiplo de \hbar e está orientado, neste caso, perpendicularmente ao plano xy no sentido positivo ou negativo. Na solução do rotor rígido e do átomo de hidrogênio a orientação do momento angular é definida por outro número quântico e o número quântico m_l estará restrito a projeção deste vetor momento angular em relação ao eixo z .

Um aspecto interessante associado com a função de onda definida pela **eq.13** é que ao invés de utilizar a definição em termos de uma função exponencial complexa, pode-se utilizar a *igualdade de Euler* e escrever a **eq.15** como:

$$\Psi(\phi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \{\cos(|m_l|\phi) \pm i \text{sen}(|m_l|\phi)\} \quad \text{eq.23}$$

Esse tratamento é conveniente e empregado em determinadas circunstâncias, tais como a análise dos orbitais do átomo de hidrogênio.

Fazendo-se a soma ou a diferença entre as funções de onda obtidas com mesmo valor do módulo de m_l ,

$$\Psi_{+-}(\phi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \{\cos(|m_l|\phi) \pm i \text{sen}(|m_l|\phi)\} \pm \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \{\cos(|m_l|\phi) \pm i \text{sen}(|m_l|\phi)\}$$

obtem-se duas funções de onda alternativas:

$$\begin{aligned} \Psi_+(\phi) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} 2\cos(|m_l|\phi) \\ \Psi_-(\phi) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} 2i \text{sen}(|m_l|\phi) \end{aligned} \quad \text{eq.24}$$

Estas duas funções de onda necessitam ser renormalizadas e as duas novas funções de onda assumem uma represen-

tação completamente real e outra completamente imaginária. Depois da normalização, o número complexo i é descartado, produzindo duas funções reais normalizadas sob a forma:

$$\begin{aligned} \Psi_+(\phi) &= \pm \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/2} \cos(|m_l|\phi) \\ \Psi_-(\phi) &= \pm \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/2} \text{sen}(|m_l|\phi) \end{aligned} \quad \text{eq.25}$$

O uso da representação da função de onda dada pela **eq.15** deve ser equivalente ao da **eq.25**, mas verifica-se que a primeira foi definida em um espaço numérico real e a segunda em um espaço imaginário.

Como mencionado anteriormente, ao descartar-se o número complexo i , está sendo alterado apenas um *fator de fase* da onda. A escolha do sinal do fator de normalização neste caso deve ser feita de tal forma que seja preservada a coerência com as propriedades de momento angular obtidas com a função de onda da **eq.15**.

Aplicando-se o operador de momento angular definido pela **eq.21** nas funções de onda dadas pela **eq.25**, verifica-se que se os sinais das duas funções de onda forem positivos ou negativos tem-se que os dois autovalores do operador de momento angular serão ambos positivos ou negativos. O momento angular obtido com a função de onda imaginária (**eq.15**) indica que existem duas componentes com sinais opostos de momento angular, como indicado pela Figura 1.

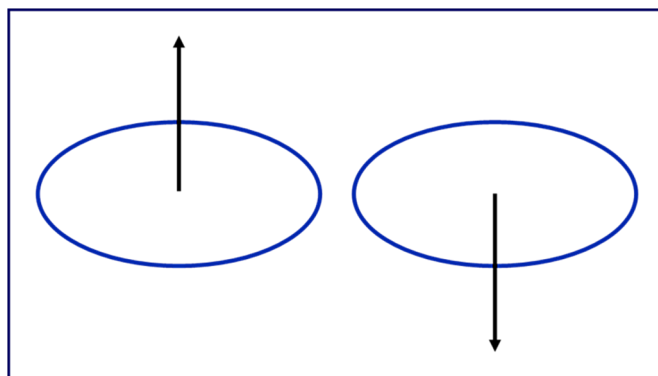


Figura 1. Duas possibilidades de orientação do momento angular.

Usualmente quando se pretende construir um gráfico da função de onda ou de sua densidade probabilidade costuma-se considerar as coordenadas cartesianas. As funções de onda definidas pela **eq.25** são dependentes da coordenada ϕ e, por conveniência, ao invés de considerar-se a transformação de coordenadas polares para cartesianas e construir-se o gráfico neste último sistema de coordenadas, é interessante chamar a atenção para a utilização do espaço polar. A Figura 2 mostra a representação gráfica da função de onda representada pelo seno para alguns valores de m_l .

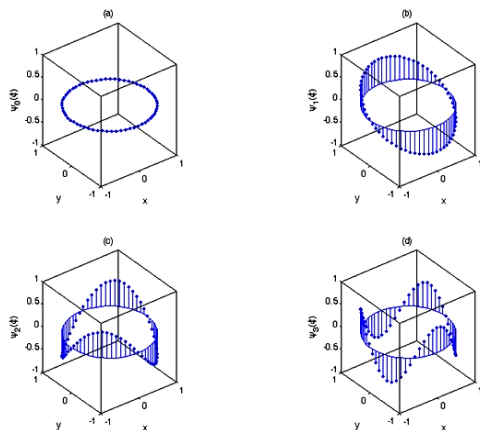


Figura 2. Gráficos da função de onda $\sqrt{1/\pi} \sin(|m_l| \phi)$ da partícula no anel com: a) $m_l = 0$, b) $m_l = 1$, c) $m_l = 2$ e d) $m_l = 3$

Outras informações

O exemplo tratado acima demonstra que a simples mudança do sistema de coordenadas pode tornar um problema considerado trivial em disciplinas de mecânica quântica em elaborados processos matemáticos que exigem o conhecimento aprofundado de novos conceitos. A escolha do sistema de coordenadas é feita por conveniência e para atingir uma representação matemática que possa ser resolvida de forma analítica ou o mais rigoroso possível. O leitor interessado em estender o tratamento da partícula na caixa pode considerar a aplicação da equação de Schrödinger em problemas mais elaborados, como a partícula em uma superfície esférica ou em um cilindro ou mesmo a partícula em uma caixa triangular. É surpreendente como uma pequena alteração na geometria da caixa ou no sistema de coordenadas modifica significativamente a resolução da equação de Schrödinger.

Referências

1- **Custodio R, Gomes AS, Martins LR.** Postulados da mecânica quântica. Rev. Chemkeys [Internet], Campinas, Rev. Chemkeys 2018:1-5 . Disponível em: <https://econtents.bc.unicamp.br/inpec/index.php/chemkeys/article/view/9638>
doi: 10.20396/chemkeys.v0i3.9638.

2- **Custodio R.** Mecânica Quântica: Conceitos e desenvolvimentos iniciais, Rev. Chemkeys [Internet], Campinas, SP, 2021; v3:e021001, 8 pp. Disponível em: <https://doi.org/10.20396/chemkeys.v3i00.15466>.
doi: 10.20396/chemkeys.v3i00.15466

3- **Bernath PF.** Spectra of atoms and molecules, Oxford University Press, New York, 1995, p.160.

[4]- **Custodio R, Politi JRS, Segala M, Haiduke RLA.** Quatro alternativas para resolver a equação de schrödinger

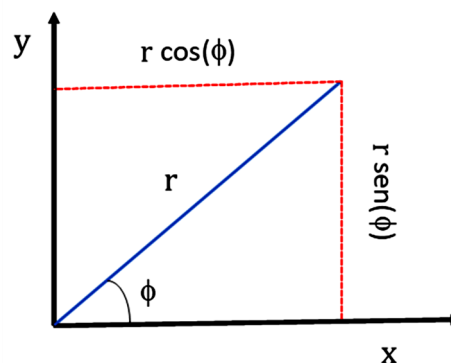
para o átomo de hidrogênio. Química Nova, 2002, 25: 159-170.

<https://doi.org/10.1590/S0100-40422002000100025>.

[5] - **Solà M, Bickelhaupt FM.** Particle on a ring model for teaching the origin of the aromatic stabilization energy and the Hückel and Baird rules, J. Chem. Educ., 2022, 99: 3497-3501.

<https://doi.org/10.1021/acs.jchemed.2c00523>.

Apêndice 1: Sistema de Coordenadas Polares



Transformação de coordenadas polares para cartesianas:

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

A.1

Transformação de coordenadas cartesianas para polares:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, x \neq 0$$

A.2

Transformação de derivada primeira em coordenadas cartesianas para polares:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

A.3

Transformação de derivada primeira em coordenadas polares para cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

A.4

Elemento de área Cartesiano:

$$d\tau = dx dy \quad -\infty \leq x \leq \infty, -\infty \leq y \leq \infty$$

A.5

Elemento de área Polar:

$$d\tau = r dr d\phi \quad 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

A.6

Transformação de derivada segunda em coordenadas cartesianas para polares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) = \\ &= \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\cos \phi \sin \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\cos \phi \sin \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} + \frac{\sin^2 \phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos \phi \sin \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial r} + \frac{\sin^2 \phi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) = \\ &= \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2 \frac{\cos \phi \sin \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos \phi \sin \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} + \frac{\cos^2 \phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi \sin \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial r} + \frac{\cos^2 \phi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

A.7

O laplaciano em duas dimensões em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

A.8

O laplaciano em duas dimensões em coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

A.9