doi:10.20396/revpibic262018803

XXVI Congresso de Iniciação Científica Unicamp
17 a 19 de outubro Campinas | Brasil

Anéis Noetherianos

Leandro P. Guidio*, Ronan Antonio dos Reis

Resumo
Este trabalho trata de um estudo introdutório em Teoria de Anéis e Ideais, em que foram estudados conceitos, propriedades e resultados envolvendo anéis, ideais, em especial, a classe dos anéis Noetherianos, ou seja, anéis que satisfazem uma certa condição de cadeia ascendente para ideais. O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo sobre o conhecido Teorema da Base de Hilbert, ou seja, que todo anel de polinômios em uma variável com coeficientes num anel Noetheriano é um anel Noetheriano, bem como, que esse resultado também é válido para anel de polinômios em várias variáveis. Este estudo aparece em várias áreas, tais como, em Geometria Algébrica, Álgebra comutativa, entre outras.

Palavras-chave:
Anéis e Ideais, Anéis Noetherianos, Teorema da Base de Hilbert.

Introdução

A Teoria de Anéis e Ideais é uma área de grande importância em várias áreas da ciência, tais como, em Álgebra, Geometria Algébrica, Álgebra comutativa. Uma classe de anéis que aparecem e desempenham um papel importante nesta Teoria é a dos anéis Noetherianos, ou seja, anéis que satisfazem certa condição de cadeia ascendente para ideais. O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo sobre o conhecido Teorema da Base de Hilbert, ou seja, que todo anel de polinômios em uma variável com coeficientes num anel Noetheriano é um anel Noetheriano, bem como, que esse resultado também é válido para anel de polinômios em várias variáveis. O termo Noetheriano é uma homenagem à matemática alemã Emmy Noether. Este trabalho foi feito com base nas referências bibliográficas.

Resultados e Discussão

Seja A um anel com as operações de adição + e multiplicação **.** .
Iniciemos com o seguinte conceito:

Definição 1: Um anel A é dito comutativo se $ab=ba$, $a,b \in A$.

Definição 2: Um subconjunto não vazio I do anel comutativo A, é dito Ideal de A, se satisfaz as propriedades:
i) Dados quaisquer $x, y \in I$ temos $x-y \in I$;
ii) Dados quais $a \in A$ e $x \in I$, então $a.x \in I$.

Definição 3: Um anel A satisfaz a condição de cadeia ascendente para ideais se dada uma sequência de ideais I_1, I_2, ..., I_n, ... de A com $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_n ...$
existe um inteiro n tal que $I_m = I_n$ para todo $m \geq n$.

Definição 4: A condição de máximo (para ideais) é satisfeita em A se cada conjunto não vazio de ideais em A, parcialmente ordenado pela inclusão possui um elemento maximal.

Definição 5: Um Ideal I é dito finitamente gerado, se existem $a_1, a_2, .., a_n$ em A tais que qualquer elemento de I pode ser escrito da forma $x_1 a_1 + x_2 a_2 + .. + x_n a_n$ com $x_1, x_2, .., x_n \in A$.

Teorema 1: São equivalentes as afirmações abaixo sobre ideais de um anel A:
i) A satisfaz a condição de cadeia ascendente para ideais.
ii) A condição de máximo é satisfeita em A.
iii) Cada ideal de A é finitamente gerado.

Definição 6: Um anel que satisfaz uma das três condições do Teorema 1 é dito Anel Noetheriano.

Exemplo 1: O anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros, o anel $\mathbb{R}[x]$ com coeficientes no corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) com as respectivas operações usuais de adição e multiplicação é um anel Noetheriano.

O seguinte resultado é conhecido como *Teorema da base de Hilbert*:

Teorema 2: Se um anel A é Noetheriano, então o anel de polinômios $A[x]$ é também Noetheriano.

Corolário 1: Se um anel A é Noetheriano, então o anel de polinômios $A[x_1, .., x_n]$ é Noetheriano.

Conclusões

A partir do estudo de tópicos da Teoria de Anéis e Ideais, estudamos a classe dos Anéis Noetherianos, em que mostramos alguns resultados, tais como, o Teorema da Base de Hilbert, e consequência.

BURTON, D.M. *A first Course in Rings and Ideals*. Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
[2]FRALEIGH, J.B. *A First Course in Abstract Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1993.
[3]GARCIA, A. e LEQUAIN, Y. Álgebra: *Um Curso de Introdução*. IMPA, 1988.
[4]GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. IMPA, 1979
[5]HERSTEIN, I.N. *Tópicos de Álgebra*. São Paulo: Editora Polígono, 1970.