

Invariantes Separáveis por Matrizes 3x3

Flávio T. P. Kajiwara, Artem Lopatin

Resumo

Um conjunto separável mínimo foi encontrado para algumas álgebras de invariantes de matrizes 3x3 sobre corpos finitos de característica arbitrária. A dizer, consideramos o seguinte caso: O(3)-invariantes de uma matriz, onde a característica é diferente de dois.

Palavras-chave:

Invariante, matriz, traço.

Introdução

Definições: Para definirmos as álgebras de invariantes

$$R = R_{n,d} = \mathbb{F}[x_{ij}(k) \mid 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq d]$$

de matrizes, consideramos a álgebra polinomial

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{11}(k) & \cdots & x_{1n}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(k) & \cdots & x_{nn}(k) \end{pmatrix}$$

junto às matrizes genéricas $n \times n$

Denote por $\sigma_t(A)$ o t -ésimo coeficiente do polinômio característico χ_A de A . Por exemplo, $\text{tr}(A) = \sigma_1(A)$ e $\det(A) = \sigma_n(A)$. A ação do grupo linear $O(n)$ sobre R é definida

pela fórmula: $g \cdot x_{ij}(k) = (g^{-1}X_k g)_{ij}$, onde $(A)_{ij}$ é a (i,j) -ésima entrada da matriz A . O conjunto de todos os elementos de R estáveis com respeito a essa ação é chamado álgebra de invariantes de matrizes $\mathbf{RO}(n)$ e essa álgebra é gerada por $\sigma_t(b)$, onde $1 \leq t \leq n$ e b percorre todos os monômios nas matrizes genéricas X_1, \dots, X_d . Denote por $H = M(n) \oplus \dots \oplus M(n)$ a soma direta de d cópias do espaço $M(n)$ das matrizes $n \times n$ sobre F . Os elementos de \mathbf{R} podem ser interpretados como funções polinomiais de H para F como segue: $x_{ij}(k)$ leva $u = (A_1, \dots, A_d) \in H$ para $(A_k)_{ij}$. Dado um subconjunto S de $\mathbf{RO}(n)$, dizemos que os elementos u, v de H são separados por S se existe um invariante $f \in S$ tal que $f(u) \neq f(v)$. Se $u, v \in H$ são separados por $\mathbf{RO}(n)$, dizemos apenas que são separados. Um subconjunto $S \subset \mathbf{RO}(n)$ do anel de invariantes é dito separável se para quaisquer u, v em H separados tivermos que são separados por S . Um subconjunto $S \subset \mathbf{RO}(n)$ é dito 0-separável se para todo $u \in H$ tal que $u \neq 0$ são separados tivermos que u e 0 são separados por S .

Neste trabalho foi estabelecido um conjunto separável mínimo para a álgebra de O(3)-invariantes de uma matriz para o caso $\text{char}F \neq 2$.

Resultados e Discussão

Resultados conhecidos para invariantes de matrizes:

Pelo Teorema de Hilbert, a álgebra de invariantes é um módulo finitamente gerado sobre a subálgebra gerada por um conjunto 0-separável. Esse resultado pode ser aplicado para encontrar um sistema de parâmetros (i.e. um conjunto algebricamente independente tal que a álgebra de invariantes é um módulo finitamente gerado sobre o mesmo) da álgebra de invariantes. Como um exemplo, para $\mathbf{RGL}(3)$ foi construído um conjunto 0-separável mínimo, o qual também é um sistema de parâmetros.³

Conclusão

Teorema: O conjunto

$$\begin{aligned} &\text{tr}(X), \sigma_2(X), \det(X), \\ &\text{tr}(XX^T), \text{tr}(X^2X^T), \text{tr}(X^2(X^T)^2), \\ &\text{tr}(X^2(X^T)^2XX^T) \end{aligned}$$

é um conjunto separável mínimo para a álgebra $\mathbf{RO}(3)$ de O(3)-invariantes de uma matriz sobre um corpo infinito F com $\text{char}F \neq 2$.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Artem Lopatin pela orientação.

Ao programa PIBIC/CNPq pelo financiamento do projeto de pesquisa.

¹A.A. Lopatin, *The algebra of invariants of 3x3 matrices over a field of arbitrary characteristic*, Commun. Algebra **32** (2004), no. 7, 2863-2883.

²A.A. Lopatin, *On minimal generating systems for matrix O(3)-invariants*, Linear and Multilinear Algebra **59**, (2011) 87-99.

³A.A. Lopatin, *The invariant ring of triples of 3 x 3 matrices over a field of arbitrary characteristic*, Sibirsk. Mat. Zh. **45** (2004), No. 3, 624-633 (Russian). English translation: Siberian Mathematical Journal 45 (2004), No. 3, 513-521.