Métodos de Elementos Finitos Mistos de Dimensão Mínima em Quadriláteros para Problemas Elípticos de Segunda Ordem.

Giovanni Taraschi*, Maicon Ribeiro Correa.

Resumo

Esse trabalho apresenta um estudo sobre o Método de Elementos Finitos (MEF) em malhas quadrilaterais para a resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDP) elípticas de segunda ordem. Em particular estudou-se a influência do espaço de busca e da discretização do domínio sobre as taxas de convergência do método. Foi desenvolvido um profundo estudo teórico baseado no artigo [1], que apresenta as condições suficientes e necessárias para a obtenção das taxas de convergência ótimas em malhas quadrilaterais afins e não-afins. Já do ponto de vista computacional, foram reproduzidos os experimentos numéricos de [1] e implementadas aproximações baseadas em elementos do tipo Serendipity de terceira ordem e em elementos do tipo Q_3 obtendo novos resultados, que vão além dos apresentados no artigo original.

Palavras-chave:

Elementos Finitos, Aproximações em Quadriláteros, Serendipity.

Introdução

Nesse trabalho estudamos a aproximação de uma equação elíptica dada pelo problema de Poisson,

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \quad (1)$$

Para isso, usamos o Método dos Elementos Finitos (MEF) em malhas compostas por elementos quadrilaterais convexos. Buscamos estudar as condições sobre os espaços de busca para a obtenção das taxas de convergência ótimas para a solução e para seu gradiente. O Método dos elementos finitos e Galerkin para o problema (1) busca encontrar $u_h \in V_h$ tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2)$$

onde V_h é aproximação de dimensão finita de $H_0^1(\Omega)$ gerada a partir de uma discretização de Ω .

Seja T_h uma discretização de Ω em subdomínios simples (elementos) E . Definindo um elemento padrão $\hat{E}$, todos os elementos reais E podem ser obtidos através de uma transformação bilinear do elemento padrão dada por:

$$F_E(\hat{x}) = \sum_{i=1}^4 l_i(\hat{x}) x_i, \quad (3)$$

onde $l_i(\hat{x})$ são as funções de forma de Lagrange associadas ao i -ésimo nó. Dessa forma podemos construir os espaços de aproximações V_h . Nesse trabalho utilizamos duas classes diferentes de espaços de aproximações:

1. Espaços dos polinômios por partes de grau parcial igual ou menor a r :

$$Q_h^r = \{v \in C^0(\Omega); v|_E \in F_E(Q_r(\hat{E})), \forall E \in T_h\},$$

onde $Q_r(\hat{E}) = \text{span}\{\hat{x}^i \hat{y}^j : i+j \leq r\}$.

2. Espaços Serendipity:

$$S_h^r = \{v \in C^0(\Omega); v|_E \in F_E(Q_r'(\hat{E})), \forall E \in T_h\},$$

onde $Q_r'(\hat{E}) = \text{span}\{\hat{x}^i \hat{y}^j, \hat{x}^i \hat{y}^j, \hat{x}^i \hat{y}^j : i+j \leq r\}$.

Resultados e Discussão

De acordo com a análise desenvolvida em [1], para soluções suficientemente regulares, espera-se que as aproximações baseadas em elementos do tipo Serendipity obtenham taxas ótimas em malhas afins e assintoticamente afins e taxas sub ótimas em malhas

não afins. Já para elementos do tipo Q , espera-se taxa de convergência ótima nos três tipos de malhas.

Com o objetivo de verificar tal previsão teórica, o MEF foi implementado em linguagem FORTRAN para diferentes tipos de malhas (afins, não-afins e assintoticamente afins) e para diferentes espaços de aproximação (Espaços baseados em elementos do tipo Serendipity e do tipo Q). Dessa forma pudemos reproduzir os experimentos feitos em [1]. Além disso, foram implementadas aproximações baseadas em elementos do tipo S_h^3 e do tipo Q_h^3 obtendo novos resultados, que vão além dos apresentados no artigo original. A tabela 1 apresenta parte dos resultados obtidos.

Tabela 1. Taxas de convergência para Elementos dos tipos S_h^3 e Q_h^3 .

Elementos do tipo S_h^3					Elementos do tipo Q_h^3			
Malha quadrada			Malha Trapezoidal		Malha quadrada		Malha Trapezoidal	
	$\ u - u_h\ _{L^2}$		$\ u - u_h\ _{L^2}$		$\ u - u_h\ _{L^2}$		$\ u - u_h\ _{L^2}$	
n	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	1.014e-01	-	1.040e-01	-	6.979e-02	-	7.027e-02	-
4	2.431e-02	2.06	2.224e-02	2.23	1.289e-02	2.44	1.374e-02	2.39
8	2.314e-03	3.39	5.238e-03	2.09	1.102e-03	3.55	1.415e-03	3.28
16	1.574e-04	3.88	5.953e-04	3.14	8.785e-05	3.65	1.179e-04	3.59
32	8.008e-06	4.30	9.855e-05	2.59	5.686e-06	3.95	7.255e-06	4.02
64	4.811e-07	4.06	1.412e-05	2.80	3.584e-07	3.99	4.581e-07	3.99
128	2.980e-08	4.01	2.006e-06	2.82	2.245e-08	4.00	2.871e-08	4.00

Conclusão

Além de reproduzir com sucesso os experimentos numéricos realizados no artigo original, esse trabalho obteve novos resultados usando aproximações baseadas em elementos do tipo Serendipity de terceira ordem e do tipo Q_3 . Esses novos resultados concordam em totalidade com a análise desenvolvida em [1] e fortalecem a validação experimental da mesma

Agradecimentos

Gostaria de agradecer todos os professores e funcionários da Unicamp que possibilitaram o meu aprendizado e ao PIBIC/CNPq pelo financiamento.

[1] D. Arnold, D. Boffi, and R. Falk. Approximation by quadrilateral finite elements. *Mathematics of computation*, 71(239):909–922, 2002.