DOI: 10.20396/revpibic2720192204

XXVII Congresso de Iniciação Científica Unicamp
16 a 18 de outubro de 2019 - Campinas | Brasil

# Álgebra de Lie do Grupo Unitário

**Leandro Peruqui Guidio*, Ronan Antonio dos Reis**

**Resumo**
Este trabalho trata de um estudo introdutório sobre Teoria de Lie e Aplicações, em que foram estudados conceitos e resultados de grupos de Lie de matrizes e álgebras de Lie. O principal objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre o grupo unitário U(n) e sua álgebra de Lie.

***Palavras-chave:***
*Álgebras de Lie,Grupos de Lie, Grupo Unitário*

## Introdução

A Teoria de Lie surgiu com Sophus Lie por volta de 1870 com o objetivo de estudar as equações diferenciais sob a ótica de Galois que estudava equações algébricas. Com a descoberta dos grupos infinitesimais, chamados atualmente de álgebras de Lie, surgiram resultados que estabelecem uma relação entre os grupos de transformações (grupos de Lie) de natureza geométrica, e as álgebras de Lie, de natureza algébrica. Este trabalho trata de um estudo introdutório sobre tal teoria, o qual tem como foco principal apresentar um estudo sobre o grupo unitário $U(n)$ e sua álgebra de Lie. Este estudo aparece em várias áreas, tais como, em Geometria e Topologia, Teoria dos Grupos de Lie e Álgebras de Lie, entre outras. Este trabalho foi feito com base nas referências bibliográficas.

## Resultados e Discussão

Seja $Gl(n,\mathbb{C})$ o grupo linear de todas as matrizes $n \times n$ invertíveis cujas entradas estão no corpo complexo $\mathbb{C}$, e $U(n) = \{A \in Gl(n,\mathbb{C});\ A(\bar{A})^T = I_n\}$ o subgrupo de $Gl(n,\mathbb{C})$.

Iniciemos com a seguinte definição:

**Definição 1:** Um *grupo de Lie de matrizes* é um subgrupo fechado $G$ de $Gl(n,\mathbb{C})$.

**Exemplo 1:** O grupo $U(n)$ é um grupo de Lie de matrizes.

**Definição 2:** Seja $G$ um grupo de Lie de matrizes. O espaço tangente de $G$ na identidade $I$ de $G$ é o conjunto $\mathfrak{g} = \{\gamma'(0) \in M(n,\mathbb{K});\ \gamma$ é uma curva diferenciável em $G$ com $\gamma(0) = I\}$. Notação: $\mathfrak{g} = T_I G$.

**Definição 3:** Uma *álgebra de Lie* é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ munido de um produto (colchete) $[\,,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, satisfaz:

**i)** $[\,,]$ é bilinear, isto é
$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$$
e
$$[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z].$$

**ii)** $[\,,]$ é anti-simétrico, ou seja,
$$[X, Y] = -[Y, X].$$

**iii)** Identidade de Jacobi, isto é,
$$\big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] + \big[Z[X,Y]\big] = 0.$$

**Exemplo 2:** O espaço $\mathfrak{u}(n)$ das matrizes $A$ anti-hermitianas $n \times n$ é uma álgebra de Lie de matrizes com o colchete $[X, Y] = XY - YX$.

**Teorema 1:** Seja $G$ um grupo de Lie de matrizes. Então, o par $(T_I G, [\,,])$ é uma álgebra de Lie.

**Definição 4:** A álgebra de Lie de $G$ é o espaço tangente $T_I G$ com o colchete $[\,,]$.

**Proposição 1:** O espaço $\mathfrak{u}(n)$ com o colchete $[\,,]$, é a álgebra de Lie do grupo $U(n)$.

## Conclusões

A partir do estudo de grupos de matrizes e álgebras de Lie, mostramos que a álgebra de Lie do grupo $U(n)$ é a álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$.

## Agradecimentos

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro.

[1] Baker, A. *Matrix Groups*: An Introduction to Lie Group Theory. New York: Springer-Verlag, 2002.
[2] Curtis, M. L. *Matrix Groups.* New York: Springer-Verlag, Berlin, 1979.
[3] San Martin, L. A. B. *Álgebras de Lie*. 2. Ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2010.
[4] San Martin, L. A. B. *Grupos de Lie*. Campinas: Editora da Unicamp, 1999.