DOI: 10.20396/revpibic2720191705

XXVII Congresso de Iniciação Científica Unicamp
16 a 18 de outubro de 2019 - Campinas | Brasil

Teoria das Probabilidades e Cadeias de Markov.

Marianna Degani*, Francys Souza, Paulo Ruffino.

Resumo

Nesse projeto, caracterizamos a probabilidade segundo os axiomas de Kolmogorov [3]. Começamos com as ideias "básicas" (teoria dos conjuntos, σ-álgebra e σ-álgebra de Borel) a partir do qual evoluímos para os conceitos de variável aleatória, esperança vista como integral de Lebesgue [2], Teorema de Radon-Nikodym, esperança condicional e os teoremas limites. Na segunda parte do projeto, caracterizamos filtragem, e processos estocásticos. Nos concentrando em cadeias de Markov [1] no qual estudamos conceitos como tempos de parada, estados de uma cadeia de Markov, probabilidades de transição, autovalores, cadeias irredutíveis e comportamento limite de uma cadeia de Markov.

Palavras-chave:

Probabilidade, σ-algebra, Cadeias de Markov.

Introdução

A probabilidade é o ato de atribuirmos "pesos" aos eventos, mas a qual eventos vamos atribuir probabilidade?

Para responder essa questão adotamos a definição proposta por Kolmogorov (1932) de uma consequência da construção axiomática de probabilidade. Também definimos a integral de Lebesgue, a esperança condicional e o teorema de Radon-Nikodym representando um funcional linear sobre um espaço de Hilbert.

Resultados e Discussão

Definição 1.1: Um experimento com espaço amostral Ω e classe de eventos A. Além disso, a probabilidade deve satisfazer os seguintes axiomas:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ e $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, para todo evento A.
- Para qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, \ldots$, isto é, eventos para os quais $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$ temos que:

  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Teorema 1.1: Continuidade monótona, presente também na esperança, se $A_n \uparrow A$, então $\mathbb{P}(A_n) \uparrow \mathbb{P}(A)$, similarmente se $A_n \downarrow A$ então $\mathbb{P}(A_n) \downarrow \mathbb{P}(A)$.

Definição 2.1: Seja uma variável aleatória simples, na forma $X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{Ai}(\omega)$, $\omega \varepsilon (\Omega)$; no qual $x_i \varepsilon R$ são números reais distintos e $\{A_i : i = 1, 2, \ldots, n\} \subset$ A, é uma partição de Ω. Teorema 2.1: Para todo X, uma variável aleatória positiva, existe uma sequência de variáveis aleatórias simples que converge pontualmente para X. Definição 2.2: Esperança como limite de v.a.'s simples:

$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(A_i)$.

Definição 3.1: Seja uma variável aleatória positiva X, dado a σ-álgebra $G(\subset F)$, é denotada por E(X|G) é a unica ($\mathbb{P}$- q.c.) v.a. satisfazendo que E[X|G] é G-mensurável e que para todo $A \varepsilon G$ temos $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A E[X|G] d\mathbb{P}$. Teorema 3.1: (Teorema de Radon-Nikodym) Seja (X, F, μ) um espaço de medida, com μ medida finita. Se ν é uma medida finita sobre F absolutamente contínua com respeito a medida μ, então existe uma função mensurável finita f sobre X tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para todo conjunto mensurável E.

Definição 4.1: Um conjunto de v.a.'s que descrevem a evolução de um sistema ao longo do tempo através da filtragem. Teorema 4.1: Dado $(\Omega, F, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, uma coleção de v.a.'s $\{X(t), t \in T\}$, onde $T \subset R$ é um conjunto de índices. Cada X(t) assume valores em um conjunto $S \subset R$ (S é o espaço de estados), e X(t) é o estado do processo no tempo t. Assim:

$F_{t1, \ldots, tn}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}[\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \varepsilon \Omega / X_{t1}(\omega) \leq x_i\}]$.

Definição 5.1: Seja um processo estocástico {Xn, n≥0} assumido valores em $S \subset Z$ e descrito por: $X_n = i$ (o processo está no estado i no tempo n) então existe uma probabilidade fixada $\mathbb{P}_{ij}$ que esteja no estado j no tempo n+1. Isto é, admite-se que: $\mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i] = \mathbb{P}_{ij}$ para quaisquer estados $i_0, i_1, \ldots, i$, j e todo $n \geq 0$.$\{X_n, n \geq 0\}$.

Teorema 5.1: (Chapman-Kolmogorov):

$\mathbb{P}[X_m=j][X_n=i] = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_{m-k}[x_m, j] \mathbb{P}_{k-n}[i, x_n]$

Conclusões

Foram desenvolvidos conceitos acerca da construção de uma σ-álgebra, em seguida definimos a probabilidade via os axiomas de Kolmogorov. Além disso, definimos propriedades da probabilidade e da esperança (integral de Lebesgue), a qual é uma generalização da integral de Riemann. Em seguida, foi caracterizada a esperança condicional, que mostramos que existe e está bem definida via o teorema de Radon-Nikodym. Por fim, analisou-se processos estocásticos com variáveis aleatórias em diferentes estados ao longo do tempo.

[1] Chung, Kai Lai. *Markov chains*. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
[2] Protter, P. E. Stochastic modelling and applied probability, 2005.
[3] Shiryaev, A. N. Probability, volume 95 of graduate texts in mathematics, 1996.