DOI: 10.20396/revpibic2720191633

XXVII Congresso de Iniciação Científica Unicamp
16 a 18 de outubro de 2019 - Campinas | Brasil

Introdução à Teoria de Galois

Lucio Centrone, Luan Soares*

Resumo
A álgebra abstrata é o ramo da matemática que estuda as estruturas algébricas tais como: grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais, módulos e álgebras. A teoria de Galois é uma das importantes teorias dessa área da matemática e possui diversas aplicações teóricas e práticas, como por exemplo responder problemas clássicos da geometria referentes a construção com régua e compasso, ou o porquê de não ser possível encontrar uma fórmula para as raízes de uma equação polinomial de grau cinco ou maior usando apenas operações usuais (adição, multiplicação, subtração e divisão) e aplicação de radicais. Neste trabalho, foram desenvolvidas a teoria de grupos, anéis e corpos necessárias para provar o clássico teorema de Abel usando os estudos feitos por Galois.

Palavras-chave:
Álgebra, Teoria de Galois, Teorema de Abel.

Introdução

Em matemática, uma equação algébrica é uma equação da forma P = Q, onde P e Q são polinômios com coeficientes em um certo corpo. Elas são a base de estudo para várias áreas da matemática moderna como: A teoria algébrica dos números que é o estudo das equações algébricas de uma variável sobre o corpo dos racionais. Na teoria dos corpos, uma extensão algébrica é uma extensão tal que todo elemento é raiz de uma equação algébrica sobre um corpo base. A teoria da transcendência estuda os números reais que não são raízes de nenhuma equação algébrica sobre o corpo dos racionais. As equações diofantinas são equações polinomiais com coeficientes inteiros nas quais se está interessado nas soluções inteiras. A geometria algébrica é o estudo das soluções em um corpo algebricamente fechado de equações polinomiais multivariadas.

Resultados e Discussão

Enunciamos e provamos os resultados mais fundamentais da teoria de grupos e anéis, noções que são as mais básicas para o início do estudo de álgebra. Em anéis, definimos e construimos o conceito formal de polinômios, objeto principal de estudo. Já em corpos, houve um desevolvimento mais interessante a respeito da construção de corpos usando domínios de integridade e os primeiros usos dos anéis de polinômios sobre um corpo genérico. O estudo mais completo de polinômios, incluido o corpo das funções racionais em N variáveis, foi fundamental para avançar na teoria de Galois, onde foram formalizados conceitos citados na introdução.

O resultado mais importante deste trabalho e o da teoria de Galois é a relação encontrada pelo francês entre a estrutura dos grupos e corpos, este teorema ficou conhecido como teorema fundamental da teoria de Galois. Mais especificamente, dado um polinômio f(x) e um corpo K onde f(x) possui todas as suas raízes, ao deixar um grupo (chamado grupo de galois) agir sobre as raízes desse polinômio, percebemos uma simetria. Foi exatamente o que Galois fez, ele estudou os grupos de permutação das raízes dos polinômios e isso o levou a uma condição necessária e suficiente para saber quando um polinômio é solúvel por radicais ou não. O grupo de Galois é a chave para isso. Com a definição apresentada para a solubilidade de um grupo, o grupo de Galois de um polinômio f(x) é solúvel se, e somente se, o polinômio é solúvel por radicais. Isso ficou conhecido como a correspondência de Galois.

Conclusão

Enunciamos todas as ideias importantes para chegar ao último resultado, objetivo de toda a construção, o teorema de Abel. Foram demonstradas algumas teoremas com certas restrições mas mantendo um bom nível de generalidade. A teoria desenvolvida é repleta de aplicações, que podem ser encontradas nas referências bibliográficas ou em qualquer livro básico de álgebra.

Agradecimentos

Agradeço especialmente ao meu orientador, Lucio Centrone, quem me indicou esse projeto de estudo dessa área tão fascinante da álgebra. Agradeço também ao IMECC por toda a estrutura de apoio aos seus alunos, ao programa PIBIC e ao CNPq pela excelente oportunidade.

---

[1] Herstein, I. N. ***Topics in Algebra***. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1975.

[2] Garcia, A.; Lequain, Y. ***Elementos de Álgebra***. 6nd ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[3] Piacentini, G. M. ***Algebra un approccio algoritmico***. 1nd ed. Italia: Zanichelli, 1996.