



Análise qualitativa de um modelo de propagação de dengue.

Mateus Santos Rocha*, Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.

Resumo

Para muitos sistemas de equações diferenciais ordinárias não é possível obter explicitamente suas soluções. Porém, é possível obter informações sobre estas soluções realizando um estudo qualitativo do sistema sem resolvê-lo. Neste trabalho foram estudadas ferramentas para análise qualitativa de sistemas de n equações diferenciais ordinárias e n incógnitas. Posteriormente, foi feita uma análise qualitativa para um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares que descreve a propagação de dengue para populações espacialmente homogêneas de mosquitos (na fase aquática, suscetíveis na fase alada e infectados na fase alada) e de humanos (suscetíveis e infectados).

Palavras-chave:

Equações diferenciais ordinárias, Dengue, Análise de ponto de equilíbrio.

Introdução

A estabilidade assintótica de singularidades de sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias foi estudada através de uma análise de seus autovalores. Então foi estudada a estabilidade assintótica de singularidades de sistemas autônomos não lineares utilizando linearização do sistema juntamente com os critérios do caso linear.

Foram, então, aplicadas estas ferramentas a um sistema que descreve a propagação de dengue. Tal sistema é um sistema autônomo de 5 equações diferenciais ordinárias não lineares acopladas, cujas variáveis são funções do tempo t que descrevem as populações de: mosquitos na fase aquática, mosquitos na fase alada suscetíveis, mosquitos na fase alada infectados, humanos suscetíveis e humanos infectados.

Resultados e Discussão

Foi considerado um sistema autônomo de cinco equações diferenciais ordinárias não lineares acopladas que descreve a propagação de dengue em determinada região.

Para este sistema foram encontradas 3 singularidades, denotadas por P_0 , P_1 e P_2 .

A singularidade P_0 representa uma região livre de mosquitos e com todos os seres humanos suscetíveis. A condição necessária e suficiente para que esta singularidade seja assintoticamente estável é que o chamado parâmetro ecológico Q_0 seja menor que 1. Isto significa que dada uma população inicial de mosquitos suficientemente pequena, os mosquitos férteis não consigam produzir fêmeas o suficiente para se estabelecer no ambiente.

A singularidade P_1 representa uma região com mosquitos e seres humanos, porém sem nenhuma infecção por dengue. A condição necessária e suficiente para que esta singularidade seja assintoticamente estável é que o parâmetro ecológico Q_0 seja maior que 1 e que a chamada reprodutibilidade basal R_0 seja menor que 1. Biologicamente, Q_0 maior que 1 significa que dada uma população inicial de mosquitos, esta não tenderá à extinção com o passar do tempo devido à produção suficiente de fêmeas por mosquitos férteis. Já R_0 ser menor que 1 significa que dada uma população inicial de

mosquitos infectados, a infecção de mosquitos suscetíveis por humanos infectados é baixa o suficiente para que, com o passar do tempo, as populações de mosquitos e humanos infectados tendam a zero.

A singularidade P_2 representa uma região com população não nula de mosquitos e humanos, suscetíveis e infectados. Para esta singularidade foram feitas simulações numéricas em dois tipos de ambientes: com temperatura de 30°C e com temperatura de 20°C, ambos com densidade média de 150 habitantes por km², similar à densidade do estado de São Paulo. Os parâmetros para estas simulações foram obtidos em Maidana & Yang [3]. Todas as simulações mostraram que, nas condições dadas, as soluções tendem a se estabilizar em um certo ponto, que é, de fato, a singularidade P_2 . Calculando explicitamente a singularidade P_2 para estes dois casos mencionados acima, foi obtido que é assintoticamente estável.

Conclusões

Foi possível estabelecer condições necessárias e suficientes para determinar a estabilidade assintótica de duas das três singularidades do sistema que descreve a propagação de dengue. Para a terceira singularidade foram feitas oito simulações numéricas, para duas temperaturas distintas. Em todas as simulações as soluções tendem à singularidade P_2 quando $t \rightarrow \infty$, logo para tais condições a singularidade P_2 é assintoticamente estável. Assim, conseguiu-se obter informações sobre o comportamento assintótico de soluções de um sistema de 5 equações diferenciais ordinárias não lineares acopladas que descreve a propagação de dengue em um ambiente sem obtê-las explicitamente. Dessa forma, o objetivo do projeto foi cumprido.

¹ SALES, Nazime. *Análise qualitativa de um modelo de propagação de dengue para populações espacialmente homogêneas*. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas. 2015.

² BRAUN, Martin. *Differential Equations and Their Applications*. New York, EUA, Springer-Verlag New York. 1941.

³ MAIDANA, N.; YANG, H. *Describing the geographic spread of dengue disease by traveling waves*.