

Análise qualitativa de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias e aplicações.

Mateus Santos Rocha*, Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Resumo

Para muitos sistemas de equações diferenciais ordinárias não é possível ou é muito difícil obter explicitamente sua solução. Porém, é possível obter informações sobre estas soluções realizando um estudo qualitativo do sistema sem resolvê-lo. Neste trabalho é feito um estudo de ferramentas que permitam tais análises, como uso de plano de fase e de funções de Liapunov. Além disso, serão estudadas algumas aplicações destas ferramentas.

Palavras-chave:

Equações diferenciais ordinárias, Análise qualitativa de equações diferenciais, Aplicações de equações diferenciais.

Introdução

Problemas de diversas áreas do conhecimento, como física, engenharias e biologia, podem ser descritos por sistemas de equações diferenciais. Apesar de o Teorema da existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias nos garantir que, sob certas condições, existe única solução para problemas de valor inicial, muitas vezes é muito difícil (ou até impossível) encontrá-la explicitamente.

Por este motivo, neste projeto foram estudados métodos para análise qualitativa de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Foram estudados, por exemplo, planos de fase para sistemas 2×2 , Teorema de Poincaré-Bendixon, Alternativa de Fredholm, funções de Liapunov, bem como aplicações destas ferramentas em sistemas que descrevem a dinâmica presa-predador, o movimento de um pêndulo e um sistema RLC, entre outros.

Resultados e Discussão

Para um sistema de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes da forma $\dot{x} = Ax + b$, onde A é uma matriz quadrada $n \times n$ e b é uma matriz coluna $n \times 1$, garantimos que existe uma única solução.

Em particular, foi visto que este sistema possui uma solução periódica com período T se, e somente se,

$$\int_0^T A^t y(t) b dt = 0$$

onde $y(t)$ é solução do sistema adjunto $\dot{y} = -yA(t)$.

Em seguida, foram estudados sistemas autônomos no plano, que são sistemas da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Uma singularidade para este sistema é um par $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. As soluções $(x(t), y(t))$ são curvas parametrizadas no plano de fases (x, y) denominadas órbitas. O sistema acima possui significado geométrico entendendo $(f(x, y), g(x, y))$ como um campo vetorial no plano e as órbitas como curvas integrais deste campo, ou seja, as curvas que em cada ponto são tangentes ao campo do sistema

O conjunto

$$\gamma = \gamma(P) = \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\},$$

onde $(x(t), y(t))$ é solução do sistema acima sujeito à condição inicial $P = (x(t_0), y(t_0))$ é chamado de órbita do

sistema que passa por P . Define-se então o conjunto ω -limite da órbita que passa por P como

$$\omega(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ t.q. } (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x(t_n), y(t_n))\}$$

O Teorema de Poincaré-Bendixon nos permite obter informações sobre o conjunto ω -limite a partir das órbitas e das singularidades de um sistema. Por exemplo, se $\gamma(P)$ é limitada e $\omega(P)$ não contém nenhuma singularidade, então $\omega(P)$ é uma órbita fechada, podendo concluir-se que as soluções que passam por P tendem a ser "cíclicas" à medida que t cresce.

Finalmente, para um sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ de n equações com a condição inicial $f(0) = 0$, uma função $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um conjunto Ω que contém uma bola fechada centrada na origem, é dita de Liapunov para este sistema se $V(0) = 0$, $V(x) > 0 \forall x \neq 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x$, onde $\dot{V}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\dot{V}(x) = \langle \text{grad } V(x), f(x) \rangle$$

A existência de uma função de Liapunov garante a estabilidade da solução nula, além de restringir o conjunto ω -limite ao conjunto onde esta função de Liapunov possui pontos críticos.

Conclusões

Dado um sistema autônomo de equações diferenciais podemos linearizá-lo e usar o teorema de Poincaré-Bendixon para estudarmos o comportamento de suas soluções. Também podemos utilizar de Funções de Liapunov para determinar a estabilidade da solução nula. Além de ser possível determinar a existência de solução periódica de um sistema utilizando o sistema adjunto. Assim, podemos obter diversas informações sobre as soluções de um sistema autônomo mesmo sem encontrá-las explicitamente.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Equações Diferenciais Aplicadas*. (3a. Edição). Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

SOTOMAYOR, Jorge. *Equações diferenciais ordinárias*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

SOTOMAYOR TELO, Jorge Manuel, *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.